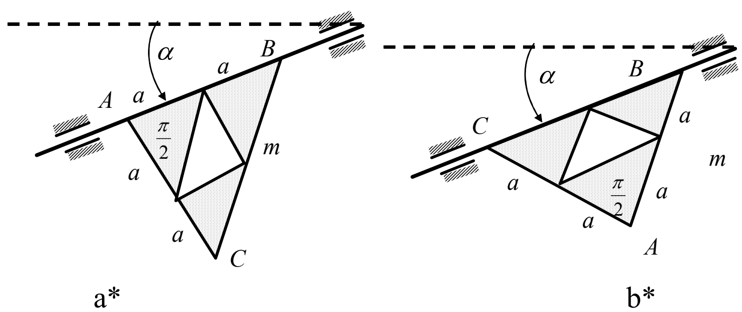
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У НИШУ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
Испитни рок: ***Децембарски испитни рок (26. децембра) 2008.***
Предметни наставник: ***Проф. др Катица (Стевановић) Хедрих***, *академик Академије наука високих школа и универзитета Украјине, академик интернационалне Академије нелинеарних наука Москва. Члан Научног друштва Србије.*
Предметни асистент: ***Мр Јулиана Симоновић,*** *дипл. маш. инг, (на одсуству)*

R E Š E NJ A
ZADATAKA SA PISMENOG DELA ISPITA IZ PREDMETA
ЕЛАСТОДИНАМИКА
ELASTODINAMIKA

ПРВИ ЗАДАТАК: Физичко клатно са слике бр. 1.а*, у облику танке хомогене плочице-једнакокраког правоуглог троугла ABC са правим углом у темену A, катета дужина по $2a$, из које је извађен део облика правоуглог троугла катета a, која има масу m, може осциловати око осе $\vec{u}$ која пролази кроз страницу AB и захвата са хоризонтом угао α.. Одредити кружну фреквенцију и период малих осцилација плочице око осе $\vec{u}$ и равнотежног положаја. Ако се плочица окрене тако да јој се хипотенуза поклапа са осом $\vec{u}$, слика 1.b* одредити тада кружну фреквенцију и период малих осцилација плочице око осе $\vec{u}$ и равнотежног положаја, као и однос периода сопствених малих осцилација плочице око равнотежних положаја у овом (b*) и претходном (а*) случају дефинисаних система косих физичких клатна са истом плочицом.



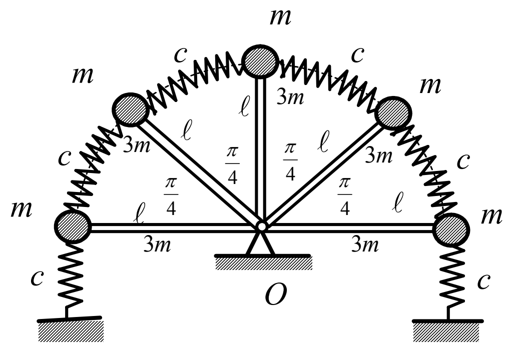
slika 1.

Kinetička i potencijalna energija kosog fizičkog klatna za slučaj pod a* koje vrši male oscilacije su:

$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_u\dot{\varphi}^2 = \frac{13}{36}ma^2\dot{\varphi}^2$ i $\mathbf{E_p} = \frac{a}{3}mg\cos\alpha\varphi^2$, pa je sopstvena kružna frekvencija malih oscilacija kosog fizičkog klatna za slućaj pod a* $\omega_{a*}^2 = \dfrac{12g\cos\alpha}{13a}$. Za sličaj pod b* imamo:

$\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\mathbf{J}_u\dot{\varphi}^2 = \frac{13}{72}ma^2\dot{\varphi}^2$ i $\mathbf{E_p} = \frac{a\sqrt{2}}{6}mg\cos\alpha\varphi^2$, pa je sopstvena kružna frekvencija malih oscilacija kosog fizičkog klatna za slućaj pod b* $\omega_{b*}^2 = \dfrac{12g\sqrt{2}\cos\alpha}{13a}$. Pa je traženi odnos: $\dfrac{\omega_{b*}^2}{\omega_{a*}^2} = \sqrt{2}$.

ДРУГИ ЗАДАТАК: Механички осцилаторни систем, приказан на слици бр. 2. у равнотежној конфигурацији, састоји се од пет једнаких хомогених штапова, дужина по ℓ, маса по $3m$, који су заједно зглобно везани у тачки O, око које могу независно један од другог да се обрћу, док на својим крајевима носе материјалне тачке маса по m. Материјалне тачке су међусобно везане једнаким завојним опругама крутости по c, које се деформишу тако да им средња линија увек одржава лук полупречника који је једнак дужини штапова, док су прва и последња везане завојним опругама у правцу тангенти на лук у тим тачкама, као што је то приказано на слици. Цео систем се налази у ХОРИЗОНТАЛНОЈ равни, а у равнотежној конфигурацији штапови међусобно заклапају углове по $\frac{\pi}{4}$. Користећи тригонометријску методу, одредити сопствене кружне фреквенције малих осцилација система око стабилних положаја равнотеже.



slika 2.

Kinetička energija sistema je:

$$E_k = ml^2 \sum_{i=1}^{5} \dot{\varphi}_i^2$$

Promena potencijalne energije sistema je:

$$E_p = \frac{1}{2} c l^2 \left[\varphi_1^2 + \sum_{i=1}^{4} \left(\varphi_{i+1} - \varphi_i \right)^2 + \varphi_5^2 \right]$$

Posle pisanja Lagrange-ovih jednačina druge vrste dobija se sistem diferencijalnih jednačina koji posle predpostavljenja rečenja u obliku $\varphi_k = A_k \cos(\omega t + \alpha)$ prelazi u sistem homogenih algebarskih jednačina:

$A_{k-1} - (2-u) A_k + A_{k+1} = 0$, gde je $k = 1 \ldots 5$ i gde smo uveli smenu $u = \frac{2m\omega^2}{c}$

Koristeći trigonometrijsku metodu rešenje pretpostavljamo u obliku $A_k = C \sin k\varphi$, iz graničnih uslova za obostarno vezan homogeni lanac imamo $A_0 = 0$ i $A_6 = 0$ odakle $6\varphi = s\pi$, tj. $\varphi_s = \frac{s\pi}{6}$. Unošenjem pretpostavljenog rešenja u sistem homogenih algebarskih jednačina sledi odnos:

$C \sin k\varphi \left[2\cos\varphi - (2-u) \right] = 0$, odakle mora biti

$\left[2\cos\varphi - (2-u) \right] = 0 \Rightarrow \quad u = 2(1-\cos\varphi) = 4\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{2m\omega^2}{c}$ što pretstavlja frekventnu jednačinu.

Sada su kružne frekvencije:

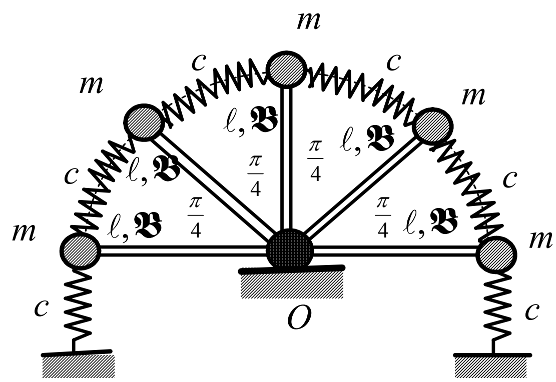
$$\omega_s = 2\sin\frac{s\pi}{12}\sqrt{\frac{c}{2m}} \qquad \text{za } s = 1,2,3....$$

Pa je zakon kretanja svake materijalne tačke:

$$\varphi_k = \sum_s C_s \sin\frac{ks\pi}{6} \cos(\omega_s t + \alpha_s).$$

ТРЕЋИ ЗАДАТАК. Механички осцилаторни систем, приказан на слици бр. 3. у равнотежној конфигурацији, састоји се од пет једнаких хомогених лаких конзола, дужина по ℓ, савојне крутости $\mathfrak{B}$, које су заједно уклештене у тачки O, у односу на коју се могу угибати независно једна од друге, док на својим крајевима носе материјалне тачке маса по m. Материјалне тачке су међусобно везане једнаким завојним опругама крутости по c, које се деформишу тако да им средња линија увек одржава лук полупречника који је једнак распону конзола, док су прва и последња везане завојним опругама крутости по c и у правцу тангенти на лук у тим тачкама, као што је то приказано на слици.

Цео систем се налази у ХОРИЗОНТАЛНОЈ равни, а у равнотежној конфигурацији конзоле међусобно заклапају углове по $\frac{\pi}{4}$. Користећи тригонометријску методу, одредити сопствене кружне фреквенције малих осцилација система око стабилних положаја равнотеже.



slika 3.

Kinetička energija sistema je:

$$E_k = \frac{1}{2} m l^2 \sum_{i=1}^{5} \dot{\varphi}_i^2$$

Promena potencijalne energije sistema je:

$$E_p = \frac{1}{2} c l^2 \left[\varphi_1^2 + \sum_{i=1}^{4} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 + \varphi_5^2 \right] + \frac{1}{2} c_e l^2 \sum_{i=1}^{5} \varphi_i^{\ 2} \ ,$$

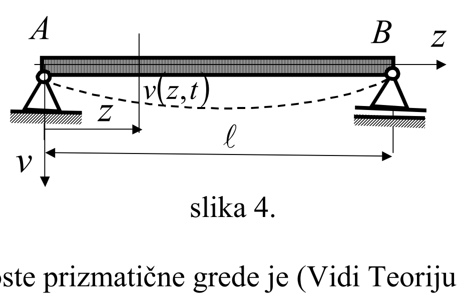
gde je $c_e = \frac{3\mathfrak{B}}{l^3}$ ekvivalentna krutost elastičnog štapa. Rešavajući zadatak analogno kao predhodni primenom trigonometrijske metode dobijaju se tražene sopstvene kružne frekvencije malih oscilacija materijalnih tačaka u obliku:

$$\omega_s^2 = \frac{c_e}{m} + \frac{4c}{m} \sin^2\left(\frac{s\pi}{12}\right) \qquad \text{za } s = 1,2,3....$$

ЧЕТВРТИ ЗАДАТАК: Тачке неутралне линије (осе) челичне греде $\overline{AB}$, распона ℓ, кружног попречног пресека пречника d, модула еластичности $\mathbf{E}$ и модула клизања $\mathbf{G}$, густине материјала ρ, у почетном тренутку су добиле угиб $v(z,0)$ и саопштене су им брзине $\left.\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right|_{t=0}$ које се мењају дуж распона ℓ греде по законима:

$$v(z,0) = \sum_{k=5}^{n+1} v_0 \sin\left((6k-1)\frac{\pi z}{\ell}\right) \qquad \text{и} \qquad \left.\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{k=3}^{n+3} v_0 \omega_0 \sin\left((7k-1)\frac{\pi z}{\ell}\right), \text{ где је } \omega_0 = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\rho A}} \ .$$

а* Одредити закон сопствених трансверзалних осцилација греде које настају поремећајем стања равнотеже греде за задате почетне услове. Којим фреквенцијама за задате почетне услове греда стварно осцилује?



slika 4.

Zakon transverzalnih oscilacija proste prizmatične grede je (Vidi Teoriju oscilacija D. Rašković):

$$v(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t \right] \sin\left(\frac{n\pi z}{\ell}\right)$$

čiji je izvod po vremenu:

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left[-A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t \right] \sin\left(\frac{n\pi z}{\ell} \right)$$

gde su sopstvene kružne frekvencije malih sopstvenih transverzalnih:

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\rho A}} = n^2 \omega_0$$

Iz početnih uslova pišemo sledeće:

$$v(z,t)\Big|_{t=0} = \sum_{k=5}^{n+1} v_0 \sin\left((6k-1)\frac{\pi z}{\ell} \right)$$

$$\left.\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{k=3}^{n+3} v_0 \sin\left((7k-1)\frac{\pi z}{\ell} \right)$$

i na osnovu toga dobijamo da su koeficijenti:

$A_{(6k-1)} = v_0$ za $k = 5....n+1$ i $A_{(6k-1)} = 0$: za $k = 1...5$

Nepoznati koeficijenti partikularnog rešenja su:

Za $k = 3.....n+3 \Rightarrow B_{(7k-1)} = \dfrac{v_0}{(7k-1)^2}$,i za $k = 1,2,3 \Rightarrow B_k = 0$ a za

Znači da za zadate početne uslove zakon transverzalnih oscilacija proste grede ima oblik:

$$v(z,t) = v_0 \left[\sum_{k=5}^{n+1} \cos(6k-1)^2 \omega_0 t \sin \frac{(6k-1)\pi}{l} z + \sum_{k=3}^{n+3} \frac{1}{(7k-1)^2} \sin(7k-1)^2 \omega_0 t \sin \frac{(7k-1)\pi}{l} z \right].$$