

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У НИШУ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ

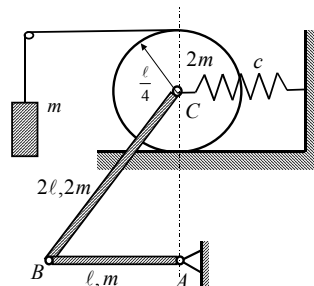
Испитни рок: *Новембар 2008 (14. новембар) - Септембарски рок (6. Септембар) 2004.*

Предметни наставник: *Проф. др Катица (Стевановић) Хедрих, академик Академије наука високих школа и универзитета Украјине, академик Академије нелинеарних наука Москва, члан GAMM, Int. ASME, EuroMech и Tensor Society.*

Предметни асистент: *на одсутву*

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА
ПИСМЕНОГ ДЕЛА ИСПИТА ИЗ ПРЕДМЕТА
ЕЛАСТОДИНАМИКА
Elastodinamika

ПРВИ ЗАДАТАК: Механички осцилаторни систем, приказан на слици бр. 1. у равнотежној конфигурацији, састоји се од једног хомогеног штапа \overline{AB} дужине ℓ , масе m , који је зглобом везан у тачки A за непокретан зид и у тачки B за други штап \overline{BC} , дужине 2ℓ , масе $2m$. Тај други штап је везан зглобно у тачки C за средиште хомогеног диска полупречника $\frac{\ell}{4}$, масе $2m$, који може да се котрља без клизања по хоризонталном глатком поду. За средиште C диска једним крајем повезана је опруга крутости c , паралелна поду, а другим је повезана за непокретни зид, управан на претходни. Преко обима диска намотано је нерастегљиво уже, занемарљиве масе, и пребачено преко малог котура такође занемарљиве масе, на чијем крају виси тег масе m . Осцилаторни систем се налази у вертикалној равни и може осциловати око приказаног равнотежног положаја, у коме је троугао $\triangle ABC$ правоугли са правим углом у темену A . Ако на систем у тачки B , управно на штап \overline{AB} , дејствује принудна сила $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 \cos \Omega t$, мале амплитуде \mathbf{F}_0 и фреквенције Ω , одредити резонантну вредност кружне фреквенције те принудне силе, у условима принудних осцилација система око равнотежног положаја, ако је $k = \frac{c\ell}{mg}$.



Слика бр. 1

ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ РЕШЕЊА ПРВОГ ЗАДАТКА: Систем има један степен слободе кретања. За генерализану координату усвајамо угао φ окретања штапа AB око осе кроз зглоб A . За мале осцилације система, односно мала одступања од назначене конфигурације можемо да напишемо:

$$\omega_p \approx 4\sqrt{3}\dot{\varphi}$$

$$y = x_D \approx 2\ell\sqrt{3}\varphi$$

$$\mathbf{J}_A^{AB} = \frac{1}{3}m\ell^2$$

$$\mathbf{J}_A^{BC} = \frac{8}{3}m\ell^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{J}_A^{AB} \omega_A^2 + \mathbf{J}_A^{BC} \omega_A^2 + \mathbf{J}_P^{Dis} \omega_P^2 + m\dot{y}^2 \right\} = 12m\ell^2 \dot{\varphi}^2$$

Статичко издужење опруге f_{st} : $\mathbf{F}_e = cf_{st} = \frac{mg}{2}(4 + \sqrt{3})$. Промена потенцијалне енергије при малим померајима у односу на равнотежни положај:

$$E_p = -mgh_{T2} - 2mgh_{T1} + \frac{1}{2}c(x_C + f_{st})^2 - \frac{1}{2}cf_{st}^2 - mgy \approx \frac{1}{2}(3c\ell - mg\sqrt{3})\ell\varphi^2$$

Диференцијална једначина малих осцилација система је:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

где је

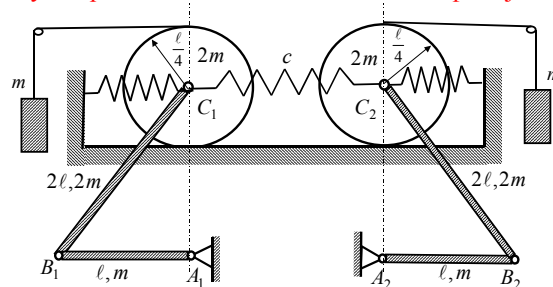
$$\omega^2 = \frac{1}{24} \left(3\frac{c}{m} - \frac{g}{\ell}\sqrt{3} \right)$$

квадрат сопствене кружне фреквенције малих осцилација система.

Услов стабилности је: $3\frac{c}{m} > \frac{g}{\ell}\sqrt{3}$. Резонантна вредност фреквенције принудне силе која десјтвује на систем је:

$$\Omega_{rez} = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{3\frac{c}{m} - \frac{g}{\ell}\sqrt{3}}.$$

ДРУГИ ЗАДАТАК: Механички осцилаторни систем, приказан на слици бр. 2. у равнотежној конфигурацији, састоји се од два хомогена штапа, $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$, дужина по ℓ , маса по m , који су појединачно зглобно везани у тачкама A_1 , односно A_2 , за непокретане зидове, и у одговарајућим тачкама B_1 , односно B_2 , за друге штапове $\overline{B_1C_1}$, односно $\overline{B_2C_2}$, дужина по 2ℓ , маса по $2m$. Ти други штапови су везани зглобно у тачкама C_1 , односно C_2 , за средишта одговарајућих хомогених дискова полупречника $\frac{\ell}{4}$, маса по $2m$, који могу да се котрљају без клизања по хоризонталном глатком поду. За средишта C_1 , односно C_2 , дискови су међусобно везани опругом крутости c , а појединачно са једнаким опругама крутости по c , паралелно поду, за непокретне зидове, управан на претходни, као што је то приказано на слици бр. 2. Осцилаторни систем се налази у вертикалној равни и може осциловати око приказаног равнотежног положаја, у коме су троуглови $\Delta A_1B_1C_1$ односно $\Delta A_2B_2C_2$ правоугли са правим углом у теменима A_1 , односно A_2 . На дискове су намотана ужад, заанемарљиве масе пребачена преко малих котурова, такође занемарљивих маса, а на крајевима ужади виси по један тег маса по m , као што је на слици приказано. Написати фреквентну једначину малих осцилација система око равнотежног положаја и одредити одговарајуће сопствене бројеве, као и сопствене кружне фреквенције, при томе усвоји да је $k = \frac{c\ell}{mg}$, $u = \frac{24\ell}{g}\omega^2$. Одредити односе амплитуда осциловања и сопствене амплитудне векторе и саставити модалну матрицу. Написати изразе за кинетичку и потенцијалну енергију система помоћу нормалних координата. За тај случај написати матрицу инерционих и квазиеластичних коефицијената.



Слика бр. 2.

ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ РЕШЕЊА ДРУГОГ ЗАДАТКА: Систем има два степена слободне кретања. За генерализане координате усвајамо углове $\varphi_i, i=1,2$ окретања штапова $A_i B_i, i=1,2$ око одговарајућих оса кроз зглобове $A_i, i=1,2$. За мале осцилације система, односно мала одступања од назначене конфигурације можемо да користимо изразе из претходног задатка, имајући у виду да се овај механички систем састоји из подсистема који се јављају у првом задатку, водећи рачуна о одговарајућим генерализаним координатама. На основу тога можемо да пишемо:

Статичка издужења опруга $f_{st1} = f_{st2} = f_{st} : \mathbf{F}_e = c f_{st} = \frac{mg}{2}(4 + \sqrt{3})$.

Кинетичка енергија система је:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \left\{ \mathbf{J}_{A_i}^{AB} \omega_{A_i}^2 + \mathbf{J}_{A_i}^{BC} \omega_{A_i}^2 + \mathbf{J}_{P_i}^{Dis} \omega_{P_i}^2 + m \dot{y}_i^2 \right\} = 12m\ell^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2).$$

Промена потенцијалне енергије при малим померајима у односу на равнотежни положај:

$$E_p = \sum_{i=1}^{i=2} \left\{ -mgh_{T2i} - 2mgh_{T1i} + \frac{1}{2}c(x_{C1} + f_{st})^2 - \frac{1}{2}cf_{st}^2 - mgy_i \right\} + \frac{1}{2}c(x_{C1} - x_{C2})^2 \approx \frac{1}{2} \left[(6c\ell - mg\sqrt{3})\ell(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - 6c\ell^2\varphi_1\varphi_2 \right]$$

или

$$E_p \approx \frac{1}{2}mg\ell \left[(6\kappa - \sqrt{3})(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - 6\kappa\varphi_1\varphi_2 \right]$$

Матрице инерцијских и квазиеластичних коефицијената система су:

$$\mathbf{A} = 24m\ell^2 \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = mg\ell \begin{pmatrix} 6\kappa - \sqrt{3} & -3\kappa \\ -3\kappa & 6\kappa - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Фреквентна једначина малих осцилација система је:

$$f \left(u = \frac{24\ell\omega^2}{g} \right) = |\bar{\mathbf{C}} - u\bar{\mathbf{A}}| = \begin{vmatrix} 6\kappa - \sqrt{3} - u & -3\kappa \\ -3\kappa & 6\kappa - \sqrt{3} - u \end{vmatrix} = 0$$

Сопствене вредности система су:

$$u_{1,2} = 6\kappa - \sqrt{3} \mp 3\kappa$$

$$u_1 = 3\kappa - \sqrt{3} \quad u_2 = 9\kappa - \sqrt{3}$$

Односи амплитуда осциловања су:

$$\frac{A_1^{(s)}}{3\kappa} = \frac{A_2^{(s)}}{6\kappa - \sqrt{3} - u_s} = C_s$$

односно

$$\frac{A_1^{(1)}}{3\kappa} = \frac{A_2^{(1)}}{3\kappa} = C_1 \quad \frac{A_1^{(2)}}{3\kappa} = \frac{A_2^{(2)}}{-3\kappa} = C_2$$

Сопствени амплитудни вектори, односно главни вектори су:

$$\{r^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{r^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Модална матрица:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

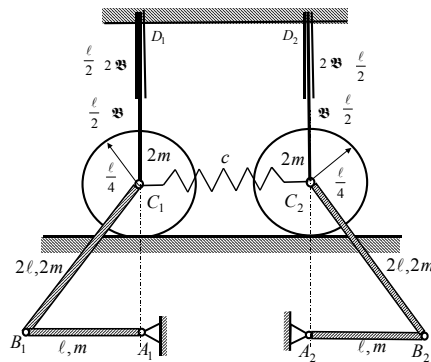
Изрази за кинетичку и потенцијалну енергију изражени помоћу нормалних координата:

$$E_k = \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2)$$

$$E_p = \frac{g}{24\ell} \left[(3\kappa - \sqrt{3})\eta_1^2 + (9\kappa - \sqrt{3})\eta_2^2 \right]$$

ТРЕЋИ ЗАДАТАК: Систем на слици бр. 3 састоји се од две лаке конзоле, $\overline{E_1C_1}$ и $\overline{E_2C_2}$, распона по ℓ , савојних крутости $2\mathfrak{B}$ од уклештења E_1 и E_2 до средине распона и \mathfrak{B} од средине до слободног краја конзола, C_1 и C_2 редом, а постављене паралелно једна другој. За слободне крајеве C_1 и C_2 редом тих конзола, везани су центри C_1 и C_2 хомогених дискова полупречника по $\frac{\ell}{4}$, маса по $2m$, око којих могу да се окрећу и који се при угибу конзола котрљају без клизања по косој глаткој равни $\overline{D_1D_2}$ правцу паралелном померању слободних крајева конзола C_1 и C_2 , који заклапа угао α са хоризонтом. За центре дискова у тачкама C_1 и C_2 су зглобно везани хомогени штапови $\overline{C_1B_1}$ и $\overline{C_2B_2}$, дужина по 2ℓ , а маса по $2m$, за које су такође зглобно везани у тачкама B_1 и B_2 везани штапови $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$, дужна по ℓ , а маса по m и који су такође зглобно везани у тачкама A_1 и A_2 за непокретне зидове. У положају равнотеже система тачке A_1 , и C_1 , као и A_2 и C_2 леже на паралелним правцима управним на раван котрљања дискова $\overline{D_1D_2}$. Уведи ознаке: $p = \frac{3\ell^3}{2^4\mathfrak{B}}$, $\tilde{k} = \frac{c\ell}{mg}$,

$u = \frac{24\ell\omega^2}{g}$, $k = \frac{1}{pc}$. Написати фреквентну једначину малих осцилација система око равнотежног положаја и одредити одговарајуће сопствене кружне фреквенције. Одредити односе амплитуда осциловања и сопствене амплитудне векторе и саставити модалну матрицу. Написати изразе за кинетичку и потенцијалну енергију система помоћу нормалних координата. За тај случај написати матрицу инерционих и квазиеластичних коефицијената.



Слика бр. 3

ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ РЕШЕЊА ТРЕЋЕГ ЗАДАТКА: Систем има два степена слободне кретања. За генерализане координате усвајамо углове $\varphi_i, i=1,2$ окретања штапова $A_iB_i, i=1,2$ око одговарајућих оса кроз зглобове $A_i, i=1,2$. За мале осцилације система, односно мала одступања од назначене конфигурације можемо да користимо изразе из претходног задатка, имајући у виду да се овај механички систем састоји из подсистема који се јављају и у првом и у другом задатку, водећи рачуна о одговарајућим генерализаним координатама.

Конзоле сматрамо опругама које можемо заменити еквивалентним крутости $c_e = \frac{1}{\alpha_{11}} = \frac{2^4\mathfrak{B}}{3\ell^3}$, па је систем случајну систему из претходног задатка, те треба водити само

рачуна о разлици у опругама $c_e = \frac{1}{\alpha_{11}} = \frac{2^4\mathfrak{B}}{3\ell^3}$.

На основу тога можемо да пишемо:

$$\text{Статичка издужења еквивалентних опруга конзолама су } f_{st1} = f_{st2} = f_{st} : \mathbf{F}_e = c_e f_{st} = \frac{mg}{2}(4 + \sqrt{3}).$$

Кинетичка енергија система је:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \left\{ \mathbf{J}_{Ai}^{AB} \omega_{Ai}^2 + \mathbf{J}_{Ai}^{BC} \omega_{Ai}^2 + \mathbf{J}_{Pi}^{DiS} \omega_{Pi}^2 + m\dot{y}_i^2 \right\} = 12m\ell^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2).$$

Промена потенцијалне енергије при малим померајима у односу на равнотежни положај:

$$E_p = \sum_{i=1}^{i=2} \left\{ -mgh_{T2i} - 2mgh_{T1i} + \frac{1}{2} c_e (x_{Ci} + f_{sti})^2 - \frac{1}{2} c_e f_{sti}^2 - mgy_i \right\} + \frac{1}{2} c (x_{C1} - x_{C2})^2 \approx \frac{1}{2} \left[(3c\ell + 3c_e - mg\sqrt{3})\ell (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - 6c\ell^2 \varphi_1 \varphi_2 \right]$$

или

$$E_p \approx \frac{1}{2} mg\ell \left[(3\kappa + 3\tilde{\kappa} - \sqrt{3})(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - 6\kappa\varphi_1\varphi_2 \right]$$

Матрице инерцијских и квазиеластичних коефицијената система су:

$$\mathbf{A} = 24m\ell^2 \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = mg\ell \begin{pmatrix} 3(\kappa + \tilde{\kappa}) - \sqrt{3} & -3\kappa \\ -3\kappa & 3(\kappa + \tilde{\kappa}) - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Фреквентна једначина малих осцилација система је:

$$f \left(u = \frac{24\ell\omega^2}{g} \right) = |\overline{\mathbf{C}} - u\overline{\mathbf{A}}| = \begin{vmatrix} 3(\kappa + \tilde{\kappa}) - \sqrt{3} - u & -3\kappa \\ -3\kappa & 3(\kappa + \tilde{\kappa}) - \sqrt{3} - u \end{vmatrix} = 0$$

Сопствене вредности система су:

$$u_{1,2} = 3(\kappa + \tilde{\kappa}) - \sqrt{3} \mp 3\kappa$$

$$u_1 = 3\tilde{\kappa} - \sqrt{3} \quad u_2 = 3(2\kappa + \tilde{\kappa}) - \sqrt{3}$$

Односи амплитуда осциловања су:

$$\frac{A_1^{(s)}}{3\kappa} = \frac{A_2^{(s)}}{3(\kappa + \tilde{\kappa}) - \sqrt{3} - u_s} = C_s$$

односно

$$\frac{A_1^{(1)}}{3\kappa} = \frac{A_2^{(1)}}{3\kappa} = C_1 \quad \frac{A_1^{(2)}}{3\kappa} = \frac{A_2^{(2)}}{-3\kappa} = C_2$$

Сопствени амплитудни вектори, односно главни вектори су:

$$\{r^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{r^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Модална матрица:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Изрази за кинетичку и потенцијалну енергију изражени помоћу нормалних координата:

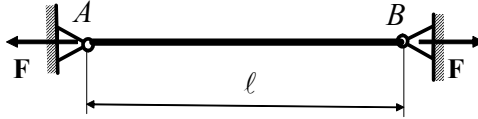
$$E_k = \frac{1}{2} (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2)$$

$$E_p = \frac{g}{24\ell} \left[(3\tilde{\kappa} - \sqrt{3})\eta_1^2 + (9\kappa + 3\tilde{\kappa} - \sqrt{3})\eta_2^2 \right]$$

ЧЕТВРТИ ЗАДАТАК: Тачке средње линије (осе у недеформисаном стању) челичне струне \overline{AB} , распона ℓ , кружног попречног пресека пречника d , модула еластичности E и модула клизања G , густине материјала ρ , у почетном тренутку су добиле угиб $w(z,0)$ и саопштене су им брзине $\left. \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} \right|_{t=0}$ које се мењају дуж распона ℓ струне по законима:

$w(z,0) = \sum_{k=1}^n w_0 \sin\left((2k-1)\frac{\pi z}{\ell}\right)$ и $\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^n w_0 \omega_0 \sin\left((2k-1)\frac{\pi z}{\ell}\right)$, где је $\omega_0 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$, а $\sigma = \frac{F}{A}$ напон који се јавља у попречном пресеку затегнуте струне у непо ремећеном стању мировања.

а* Одредити закон сопствених трансверзалних осцилација струне које настају поремећајем стања равнотеже струне за задате почетне услове. Којим фреквенцијама за задате почетне услове струна стварно осцилује?



Слика бр. 4.

ЕЛЕМЕНТИ РЕШЕЊА ЧЕТВРТОГ ЗАДАТКА: Из уџбеника Теорија осцилација, Д. Рашковић, налазимо да је парцијална диференцијална једначина трансверзалних осцилација струне:

$\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}$, где је $c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$, а σ нормални напон који се јавља у попречном пресеку струне, услед преднапрезања струне у стању мировања.

За случај граничних услова ослањања струне везивањем крајева, партикуларно решење у облику:

$$w(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi z}{\ell} (A_k \cos k\omega_0 t + B_k \sin k\omega_0 t)$$

где је $\omega_0 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$, а непознати коефицијенти се одређују из услова да су у почетном тренутку тачке

струне добиле угиб $w(z,0)$ и саопштене су им брзине $\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$ које се мењају дуж распона ℓ струне по законима:

$$w(z,0) = \sum_{k=0}^n w_0 \sin\left((2k-1)\frac{\pi z}{\ell}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi z}{\ell}$$

и

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^n w_0 \omega_0 \sin\left((2k-1)\frac{\pi z}{\ell}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k B_k \sin \frac{k\pi z}{\ell}.$$

Како је $\omega_k = k\omega_0$ то из претходних почетних услова следи да је:

$$A_{2k-1} = w_0, \text{ за } k = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$A_{2k-1} = 0, \text{ за } k > n$$

$$A_{2k} = 0, \text{ за } k = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

$$B_{2k-1} = \frac{w_0}{2k-1}, \text{ за } k = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$B_{2k-1} = 0, \text{ за } k > n$$

$$B_{2k} = 0, \text{ за } k = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Закон осциловања струне за задате почетне услове је:

$$w(z,t) = w_0 \sum_{k=1}^n \sin \frac{(2k-1)\pi z}{\ell} \left[\cos(2k-1)\omega_0 t + \frac{1}{(2k-1)} \sin(2k-1)\omega_0 t \right]$$

За задате почетне услове систем осцилује у n -фреквентном режиму осциловања са првих n фреквенција са непарним индексима из низа од бесконачног скупа могућих

вреквенција: $\omega_{2k-1} = (2k-1)\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$, $k = 1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n$.

Напомена: Писмени део испита траје 4 сата. Дозвољено је коришћење само штампане литературе. Студенти који имају одложен усмени део испита дужни су да то видно означе на корицама писменог задатка, заједно са пројем поена, као и подацима о испитном року у коме су стекли то право. Такође је обавезно да раде писмени део испита у испитном року у коме ће платити усмени део испита и да се труде да исти што боље ураде.

Писмени део испита је елиминаторан. Студент остварује право на полагање усменог дела испита и позитивну оцену писменог дела испита ако оствари најмање 22 поена од укупно 40 поена (четири задатка по десет поена) или ако тачно реши и уради најмање два цела испитна задатка. Студент који оствари право «условно позван на усмени део испита» као доквалификацију за остварење права на усмени део испита ради један теоријски задатак у трајању од једног часа и без коришћења литературе.

Резултати писменог дела испита биће саопштени у писменом облику на огласној табли факултета до 12 часова. један дан по одржаном писменом делу испита, ако дежурни асистент или наставник не саопшти другачије. Студенти који желе да добију објашњење у вези са оценом писменог дела испита или да поново виде свој писмени рад, потребно је да се обрате предметном наставнику, или асистенту у време редовних консултација са студентима. Термини консултација наставника су: понедељак 10-12 h, и петак 10-12 h у кабинету 221. Консултације асистента у кабинету 5?? понедељак 10-12 h, уторак 10-12 h.

Термин за полагање усменог дела испита по правилу први понедељак после писменог дела испита, а са почетком у 8,00 часова, ако студенти не изразе другачији захтев и договоре се са предметним наставником. На усменом делу испита није дозвољено коришћење литературе нити прибележака. На усменом делу испита прво се полаже усмени део испита из Теорије еластичности, па затим део из Теорије осцилација. За успешнију припрему испита из Еластодинамике пожељно је да су студенти положили испите из претходне године.

Резултате писменог дела испита, текстове испитних задатака и огледне примере решених испитних задатака из претходних испитних рокова, осим на огласној табли факултета, студенти могу наћи на **WEB** презентацији предмета Еластодинамика, а на адреси www.masfak.ni.ac.yu - студије - заходнички предмети треће године - Еластодинамика.