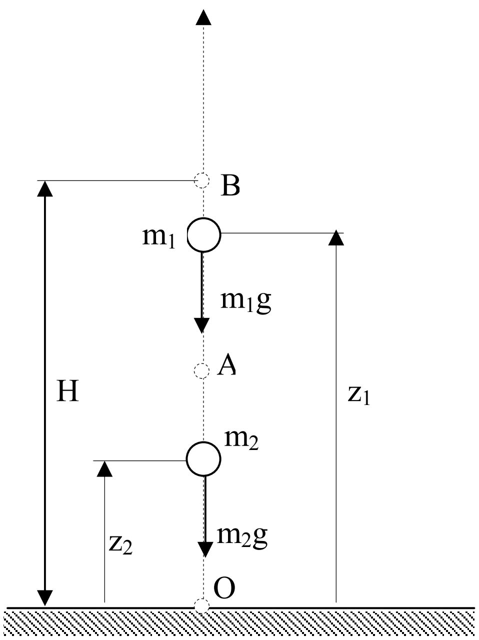
III vežba

Princip dinamičke ravnoteže

- Kretanje tačke pod dejstvom sile zemljine teže
- Pravolinisko kretanje materijalne tačke.Vertikalni hitac
- Krivolinisko kretanje materijalne tačke. Kosi hitac
- Kretanje materijalne tačke promenljive mase pod dejstvom sile koja zavisi od položaja i brzine
- Kretanje slobodne materijalne tačke. Kretanje tačke pod dejstvom sile koja zavisi od položaja i brzine.
- Reakcija veze. Zakon veza

Zadatak 1. Teška tačka mase m_1, izbačena je iz tačke O brzinom V_1 vertikalno uvis. U trenutku kada je ona došla do svoje maksimalne visine penjanja H, takođe iz tačke O bačena je druga tačka mase m_2 brzinom V_2. Kolika mora biti brzina V_2 da bi one u istom trenutku udarile o tle.



OB:

$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g; \qquad \underline{\underline{t=0;\quad z_1 = 0;\quad \dot{z}_1 = V_1;}}$$

$$\dot{z}_1 = -gt + V_1; \quad z_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + V_1 t;$$

Tačka B $\quad \dot{z}_1 = 0;\ t_{OB} = \dfrac{V_1}{g};\quad H = z_1(t_{OB}) = \dfrac{V_1^2}{2g};$

BO:

$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g; \qquad \underline{\underline{t=0;\quad z_1 = H = \frac{V_1^2}{2g};\quad \dot{z}_1 = 0;}}$$

$$\dot{z}_1 = -gt; \quad z_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{V_1^2}{2g};$$

Tačka O $\quad z_1 = 0;\ t_{BO} = \dfrac{V_1}{g};$

OA:

$$m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g; \qquad t = 0; \quad \underline{\underline{z_2 = 0;\quad \dot{z}_2 = V_2;}}$$

$$\dot{z}_2 = -gt + V_2; \quad z_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + V_2 t;$$

Tačka A

$$\dot{z}_2 = 0;\ t_{OA} = \frac{V_2}{g};\quad H = z_2(t_{OA}) = \frac{V_2^2}{2g};$$

AO:

$$m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g\,; \qquad \underline{\underline{t=0;\quad z_2 = H = \frac{V_2^2}{2g};\quad \dot{z}_2 = 0;}}$$

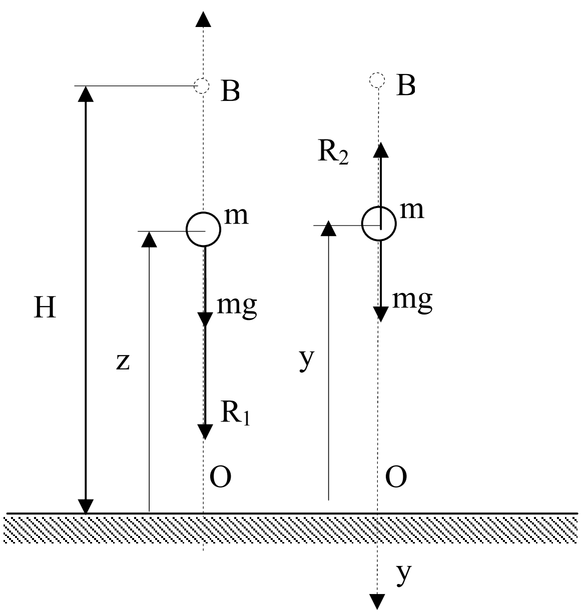
$$\dot{z}_2 = -gt;\quad z_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{V_2^2}{2g};$$

Tačka O

$$z_2 = 0;\ t_{AO} = \frac{V_2}{g};$$

$$t_{BO} = t_{OA} + t_{AO} \qquad \frac{V_1}{g} = \frac{V_2}{g} + \frac{V_2}{g} \qquad \underline{\underline{V_2 = \frac{V_1}{2}}}$$

Zadatak 2. Sa površine zemlje bačena je vertikalno uvis teška tačka M, mase m, početnom brzinom V_0. Ako je sila otpora vazduha proporcionalna kvadratu brzine tačke $R = kmV^2$, gde je k konstanta, odrediti brzinu V_k kojom će tačka udariti u zemlju.



OB:

$$m\ddot{z} = -mg - R_1 = -mg - km\dot{z}^2;$$

$$\underline{\underline{t=0;\quad z=0;\quad \dot{z} = V_0}}$$

$$\ddot{z} = \dot{z}\frac{d\dot{z}}{dz} \qquad \frac{1}{2k}\ln\left(g + k\dot{z}^2\right) = -z + C_1$$

$$\frac{\dot{z}\,d\dot{z}}{g + k\dot{z}^2} = -dz \qquad C_1 = \frac{1}{2k}\ln\left(g + kV_0^2\right)$$

$$\underline{\underline{z = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{g + kV_0^2}{g + k\dot{z}^2}\right)}} \qquad \underline{\underline{\dot{z} = 0;\quad z = H = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{g + kV_0^2}{g}\right)}}$$

BO:

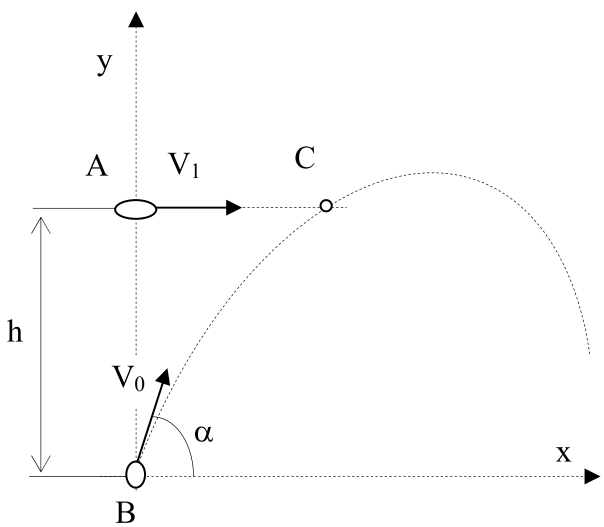
$$m\ddot{y} = mg - R_2 = mg - km\dot{y}^2; \qquad \underline{\underline{t=0;\quad y=0;\quad \dot{y}=0;}}$$

$$\ddot{y} = \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy};\qquad \frac{\dot{y}\,d\dot{y}}{g - k\dot{y}^2} = dy\,; \qquad -\frac{1}{2k}\ln\left(g - k\dot{y}^2\right) = y + C_2 \qquad C_2 = -\frac{1}{2k}\ln(g)$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{g}{g - k\dot{y}^2}\right)}}$$

$$y = H = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{g + kV_0^2}{g}\right); \quad \dot{y} = V_k; \qquad \underline{\underline{V_k{}^2 = \frac{g}{g + kV_0^2}V_0^2}}$$

Zadatak 3. Avion leti horizontalno na visini h nad zemljom brzinom V_1. U trenutku kada se avion nalazi na istoj vertikali sa topom ispali se iz topa projektil na avion. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže za posmatrani projektil i odrediti uslov koji treba da zadovolji početna brzina V_0 projektila da bi projektil pogodio avion i odrediti ugao α prema horizontu pod kojim treba gađati iz topa. Otpor vazduha zanemariti.



A: $$x_1 = V_1 t \qquad y_1 = h$$

B: $$x_2 = V_0 t\cos(\alpha) \qquad y_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t\sin(\alpha)$$

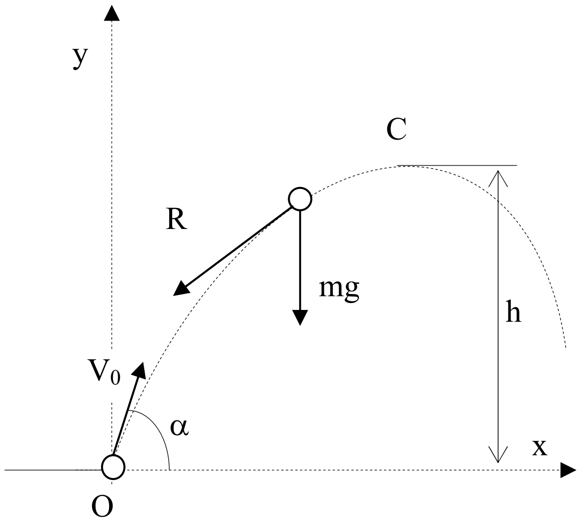
C: $$x_1 = x_2 \qquad y_1 = y_2$$

$$V_1 t = V_0 t\cos(\alpha) \qquad h = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t\sin(\alpha) \qquad \underline{\underline{\cos(\alpha) = \frac{V_1}{V_0}}};$$

$$\frac{1}{2}gt^2 - V_0 t\sin(\alpha) + h = 0; \qquad D = V_0{}^2\sin^2(\alpha) - 4h\frac{1}{2}g \ge 0;$$

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^2 \qquad \underline{\underline{V_0{}^2 \ge V_1{}^2 + 2gh}}$$

Zadatak 4. Otpor vazduha kretanju materijalne tačke mase m je proporcionalan prvom stepenu brzine (koeficijent mk). Napisati jednačine dinamičke ravnoteže za posmatranu pokretnu tačku i odrediti konačne jednačine kretanja, koordinate najviše tačke na putanji i vreme posle koga će tačka stići u taj položaj.



$$\vec{R} = -km\vec{V}$$

$$m\ddot{x} = -mk\dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -mk\dot{y} - mg$$

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -kdt \qquad \dot{x} = V_0\cos(\alpha)e^{-kt}$$

$$x = \frac{V_0\cos(\alpha)}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

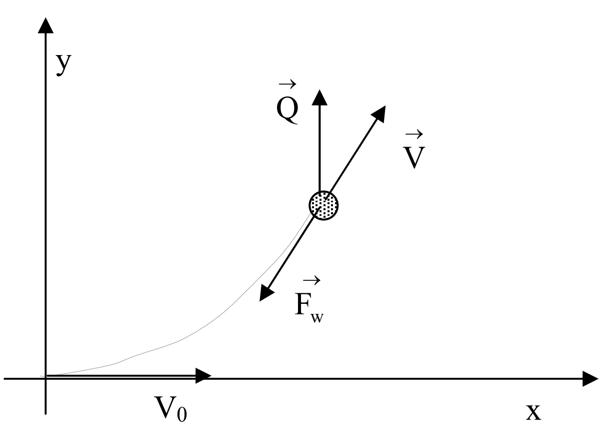
$$\frac{d\dot{y}}{g + k\dot{y}} = -dt \qquad \dot{y} = \frac{1}{k}\left(g + kV_0\sin(\alpha)\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

$$y = \frac{1}{k^2}\left(g + kV_0\sin(\alpha)\right)\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t$$

C: $\qquad \dot{y} = 0 \qquad e^{-kT} = \dfrac{g}{g + kV_0\sin(\alpha)} \qquad \boxed{T = \dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{g + kV_0\sin(\alpha)}{g}\right)}$

$$x_C = \frac{V_0^2\sin(2\alpha)}{2\left(g + kV_0\sin(\alpha)\right)} \qquad y_C = \frac{V_0\sin(\alpha)}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(\frac{g + kV_0\sin(\alpha)}{g}\right)$$

Zadatak 5. Materijalna tačka M, mase m, kreće se u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile otpora $\vec{F}_w = -\mu m\vec{V}$ i vertikalne sile uzgona $Q = kmV_x^2$, gde su μ i k pozitivne konstante, $\vec{V}$ - brzina tačke i V_x – projekcija brzine na x-osu. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže za posmatranu pokretnu tačku i odrediti konačne jednačine kretanja i putanju tačke ako je tačka u početnom trenutku bila u koordinatnom početku i imala je brzinu V_0, u smeru pozitivne x-ose.



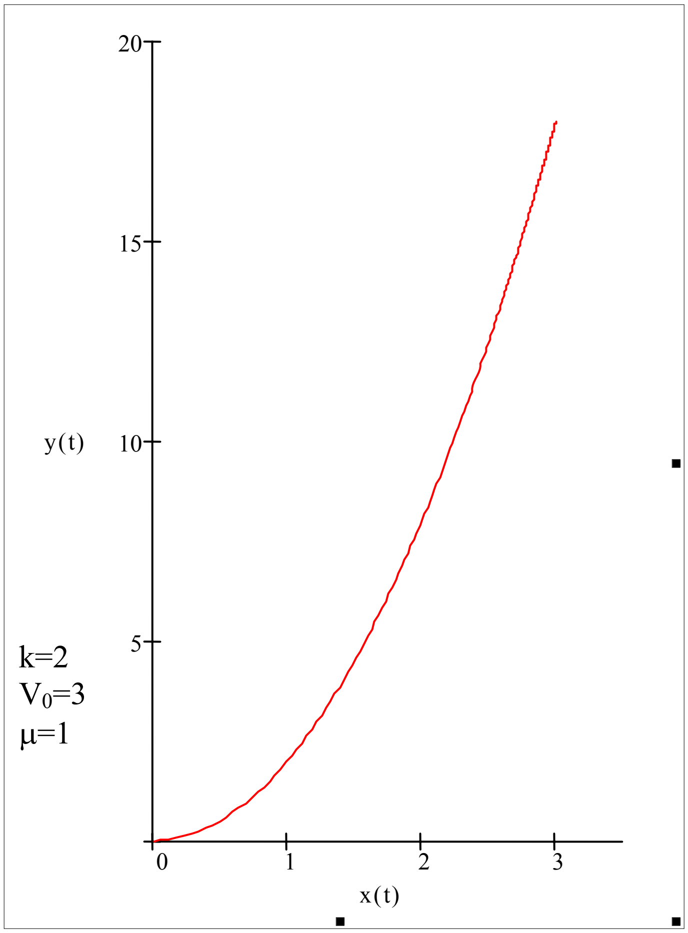
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}; \qquad \vec{Q} = km\left(\dot{x}\right)^2\vec{j}$$

$$\vec{F}_w = -\mu m\vec{V} = -\mu m\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}\right)$$

$$m\vec{a} = \vec{F}_w + \vec{Q}$$

$\ddot{x} = -\mu\dot{x}$ $\quad\quad$ $\ddot{y} = k\left(\dot{x}\right)^2 - \mu\dot{y}$ $\quad\quad$ $t=0;\quad x=0;\quad \dot{x}=V_0;$

$y=0;\quad \dot{y}=0;$



$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\mu dt;\quad \ln\left(\dot{x}\right) = -\mu t + C_1;$$

$$C_1 = \ln(V_0);\quad \dot{x} = V_0 e^{-\mu t};$$

$$x = -\frac{V_0}{\mu}e^{-\mu t} + C_2;\quad C_2 = \frac{V_0}{\mu};$$

$$x = \frac{V_0}{\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\right);$$

$$\ddot{y} + \mu\dot{y} = kV_0^{\,2}e^{-2\mu t}$$

$$\dot{y}_p = Ae^{-2\mu t};\quad A = -\frac{kV_0^{\,2}}{\mu}\quad \dot{y}_p = -\frac{kV_0^{\,2}}{\mu}e^{-2\mu t};$$

$$\dot{y}_h = C_3 e^{ut}$$

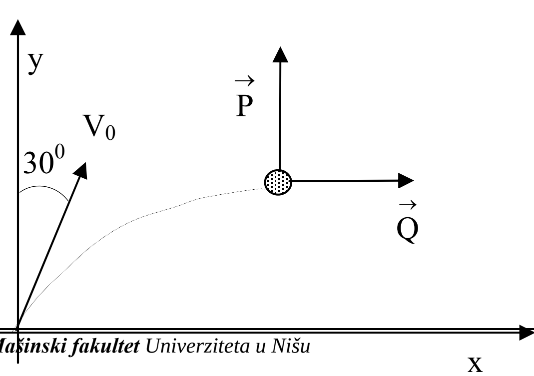
$$uC_3e^{ut} + \mu C_3 e^{ut} = 0;\quad\quad u = -\mu$$

$$\dot{y}_h = C_3 e^{-\mu t}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_h + \dot{y}_p = C_3e^{-\mu t} - \frac{kV_0^{\,2}}{\mu}e^{-2\mu t}\quad\quad C_3 = \frac{kV_0^{\,2}}{\mu}\quad\quad \dot{y} = \frac{kV_0^{\,2}}{\mu}\left(e^{-\mu t} - e^{-2\mu t}\right)$$

$$y = -\frac{kV_0^{\,2}}{\mu^2}e^{-\mu t} + \frac{kV_0^{\,2}}{2\mu^2}e^{-2\mu t} + C_4\quad\quad C_4 = \frac{kV_0^{\,2}}{2\mu^2}\quad\quad y = \frac{kV_0^{\,2}}{2\mu^2}\left(1 - e^{-\mu t}\right)^2$$

Zadatak 6. Materijalna tačka M, mase m, kreće se u ravni pod dejstvom sile $P = \mu m v_x$, paralelne Oy-osi i sile $Q = kmv_x$, paralelne Ox-osi, gde su μ i k pozitivne konstante, v_x - projekcija brzine na x - osu. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže za posmatranu pokretnu tačku. Ako je u početnom trenutku tačka bila u koordinatnom početku i imala je početnu brzinu v_0, pod uglom od 30^0 u odnosu na Oy-osu, smera datog na slici, odrediti konačne jednačine kretanja tačke.



$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j};\quad\quad \vec{Q} = km\dot{x}\,\vec{i}$$

$$\vec{P} = \mu m \dot{x} \vec{j}$$

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$\ddot{x} = k\dot{x} \qquad \ddot{y} = \mu \dot{x} \qquad t = 0; \quad x = 0; \quad \dot{x} = \frac{1}{2}V_0;$$

$$y = 0; \quad \dot{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}V_0;$$

$$u = \dot{x} \qquad \dot{u} = ku \qquad \frac{du}{u} = kdt; \qquad u = \dot{x} = C_1 e^{kt}; \qquad C_1 = \frac{1}{2}V_0;$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2}V_0 e^{kt};$$

$$x = \frac{V_0}{2k}e^{kt} + C_2; \qquad C_2 = -\frac{1}{2}\frac{V_0}{k}; \qquad x = \frac{1}{2}\frac{V_0}{k}\left(e^{kt} - 1\right);$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{2}\mu V_0 e^{kt} \qquad \dot{y} = \frac{1}{2}\frac{\mu}{k}V_0 e^{kt} + C_3 \qquad C_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}V_0 - \frac{1}{2}\frac{\mu}{k}V_0$$

$$\dot{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}V_0 + \frac{1}{2}\frac{\mu}{k}V_0\left(e^{kt} - 1\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}V_0 \cdot t + \frac{1}{2}\frac{\mu}{k^2}V_0 e^{kt} - \frac{1}{2}\frac{\mu}{k}V_0 \cdot t + C_4 \qquad C_4 = -\frac{1}{2}\frac{\mu}{k^2}V_0$$

$$y = \frac{1}{2}V_0 \cdot t\left(\sqrt{3} - \frac{\mu}{k}\right) + \frac{1}{2}\frac{\mu}{k^2}V_0\left(e^{kt} - 1\right)$$

Zadatak 7. Tačka promenljive mase $m = m_0 t^2 = t^2$ kreće se u ravni Oxy pod uticajem sila $X_1 = -cx = -4x$; $X_2 = -b\dot{x}$; $b = b_0 t = t$.

a. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže za posmatranu pokretnu tačku
b. Odrediti zakon kretanja pokretne tačke.
c. Odrediti zakon kretanja pokretne tačke ako su $m = m_0 t^2 = t^2$; $b = b_0 t = 3t$; $c = 1$, a početni uslovi kretanja su za $t_0 = 10[s]$ je $x_0 = 2[m]$ i $\dot{x}_0 = 0{,}8[m/s]$

a. $I_F + \sum F_i = 0$, $-m\ddot{x} - b\dot{x} - cx = 0$

$-m\ddot{x} - t\dot{x} - 4x = 0$

$t^2\ddot{x} + t\dot{x} + 4x = 0$ što predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja posmatrane materijalne tačke.

b. Ovu diferencijalnu jednačinu rešavamo smenom $z=\ln t$, pa je $t=e^z$, a $\frac{dt}{dz}=e^z=t$. Onda su:

$\dot{x}=\frac{dx}{dz}\frac{dz}{dt}=\frac{x'}{t}$ i $\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dz}\frac{dz}{dt}=\frac{x''-x'}{t^2}$.

Posle uvođena izračunatih izvoda po vremenu u diferencijalnu jednačinu kretanja ona se svodi na:

$x''+4x=0$

koja je homogena diferencijalna jednačina drugog reda čije rešenje je:

$x=A\cos 2z+B\sin 2z=A\cos(2\ln t)+B\sin(2\ln t)$

što predstavlja zakon kretanja posmatrane materijalne tačke.

c. Za zadate vrednosti koeficijenata jednačina dinamičke ravnoteže se svodi na:

$t^2\ddot{x}+3t\dot{x}+x=0$

Rešavajući ovu diferencijalnu jednačinu smenom $z=\ln t$, ona se svodi na nehomogenu diferencijalnu jednačinu:

$x''+2x'+x=0$

koju rešavamo smenom: $x=e^{\lambda z}$ i posle uvođenja predpostavljene smene u jednačinu dobijamo njenu karakterističnu jednačinu: $\lambda^2+2\lambda+1=0$

čija su rešenja $\lambda_{1,2}=-1$ pa je rešenje diferencijalne jednačine kretanja oblika:

$x=e^{-z}(A+Bz)$ tj. $x=\frac{A+B\ln t}{t}$ pa je $\dot{x}=\frac{B(1-\ln t)-A}{t^2}$

Pa za zadate početne vrednosti dobijamo sistem jednačina po nepoznatim konstantama A i B oblika:

$A+B\ln 10=20$

$-A-B(1-\ln 10)=80$

odakle određujemo konstante $A=-210$ i $B=100$. Tako da je zakon kretanja materijalne tačke:

$$x=\frac{10(10\ln t-21)}{t}$$

Zadatak 8. Na materijalnu tačku mase $m=m_0t^2=t^2$ dejstvuju sile $X_1=-cx=-x$; $X_2=-b\dot{x}=-t\dot{x}$ i $X_3=Ft=t$. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže za posmatranu pokretnu tačku i odrediti zakon kretanja ove materijalne tačke.

a. $I_F+\sum F_i=0$**,** $-m\ddot{x}-b\dot{x}-cx+t=0$

$-m\ddot{x}-t\dot{x}-x+t=0$

$t^2\ddot{x}+t\dot{x}+x=t$ što predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja posmatrane materijalne tačke.

b. Ovu diferencijalnu jednačinu rešavamo smenom $z=\ln t$, pa je $t=e^z$, a $\frac{dt}{dz}=e^z=t$. Onda su:

$\dot{x}=\frac{dx}{dz}\frac{dz}{dt}=\frac{x'}{t}$ i $\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dz}\frac{dz}{dt}=\frac{x''-x'}{t^2}$.

Posle uvođena izračunatih izvoda po vremenu u diferencijalnu jednačinu kretanja ona se svodi na:

$x''+x=e^z$

koja je nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda čije rešenje je zbir partikularnog i homogenog integrala :

$x_h=A\cos z+B\sin z=A\cos(\ln t)+B\sin(\ln t)$

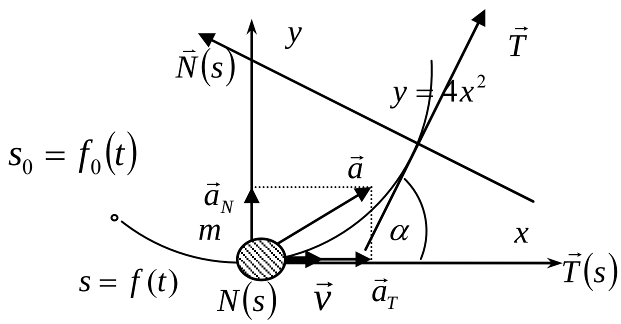
Partikularni predpostavimo u obliku: $x_p=Ce^z$, pa pošto su $x_p'=x_p$ i $x_p''=x_p$, vrednost konstante $C=\frac{1}{2}$ što se dobija unošenjem pretpostavljenoh partikularnog integrala u polaznu jednačinu.

Krajnje rešenje je:

$$x = x_h + x_p = A\cos z + B\sin z + \frac{1}{2}e^z = A\cos(\ln t) + B\sin(\ln t) + \frac{t}{2}$$

što predstavlja zakon kretanja posmatrane materijalne tačke.

Zadatak 9. Materijalna tačka mase $m = 1[kg]$ kreće se pod dejstvom sile težine po glatkoj paraboli jednačine $y = 4x^2$. Napisati jednačine dinamičke ravnoteže za posmatranu pokretnu tačku .



Pravac tangente ne krivu je definisan uglom α, jasno je da je $tg\alpha = \frac{dy}{dx} = y' = 8x$ za slučaj zadate parabole.Princip dinamičke ravnoteže u ovom slučaju jeČ

$\vec{I}_F + m\vec{g} + \vec{F}_{N.} = 0$, gde je $\vec{F}_{N.} = \lambda gradf(x, y)$, reakcija veze u pravcu gradijenta na jednačinu putanje.

Projektovano na ose oskulatorne ravni ova jednačina se svodi na:

$-m\dot{v} - mg\sin\alpha = 0$, gde je $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$

$-m\frac{v^2}{R_k} - mg\cos\alpha + F_N = 0$, gde je poluprečnik krivine: $R_k = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''} = \frac{\sqrt{(1+64x^2)^3}}{8}$

Dakle sledi sistem jednačina:

$$\ddot{s} = -g\sin\alpha$$

$$m\frac{v^2}{R_k} = -mg\cos\alpha + F_N$$

Gde su : $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+64x^2}}$ i $\sin\alpha = \frac{8x}{\sqrt{1+64x^2}}$