

DINAMIKA REALIZACIJE PROGRAMA PREDMETA DINAMIKA

I. PRVA NEDELJA:

Uvod

Osnovni kinetički elementi. Preprincipi. Preprincip postojanja. Preprincip kauzalne odredenosti. Preprincip invarijantnosti. Predmet i zadatak Dinamike. Koordinatni sistemi. Vektor položaja. Kinematička i dinamička –materijalna tačka. Kruto materijalno i deformabilno telo.

Osnovna odredjenja.

Definicija 1. Brzina.

Definicija 2. Impuls kretanja.

Definicija 3. Ubrzanje.

Definicija 4. Inerciona sila.

Primeri

II. DRUGA NEDELJA

Zakoni dinamike

Zakon veza. Zakon trenja. Zakoni otpora i potiska sredine. Zakon elastičnosti materijala. Zakon reaktivnog potiska. Zakon gravitacije. O zakonima dinamike. O sili uzajamnog privlačenja.

I. Uvod

Nauka o *Dinamici* može se različito klasifikovati. Veliki broj univerzitetskih profesora i u Evropi. i u Americi, kao i u Aziji, bolje reći i na Istoku i na Zapadu, i na Severu i na Jugu, je smatraju delom matematike, sa čime se ne slažem, jer je tačno samo to da je matematika primenjena u Mehanici i Dinamici, kao i u drugim oblastima nauka. Zaista matematika je upotrebljena kao pogodan jezik da opiše mnoge fundamentalne zakone u prirodi, ali joj to ne daje pravo da naučne oblasti prisvoji. U izvornom obliku mehanika je deo Fizike, ali zbog velikog broja primena u inženjerstvu i drugim oblastima nauka i primena, a pre svega svojim autentičnim razvojem izrasla je značajnu naučnu disciplinu koja se na univerzitetima izučava kao posebna.

I istorijski i filozofski posmatrano, može se utvrditi da *Mehanici* pripada jedan od prioriteta u procesu utemeljenja nauka, jer je jedna od prvih koja se formirala kao nauka.

Celo iskustvo moderne Fizike zasniva se na "objašnjenju" ili opisu fenomena u pojmovima i terminima *kretanja*. Naprimer *Kinetička teorija gasova* se ne može objašnjavati bez dinamike, kao i mnogi procesi i fenomeni u prirodi, počevši od svetlosti do elektriciteta.

Prva pitanja koje postavljamo su: *Ko je dao značajne doprinose da se utemelji naučna oblast pod imenom Dinamika? Kojim pojmovima objasniti filozofiju kretanja? Šta je zadatak Dinamike? I na kraju, kako primeniti teoriju i filozofiju kretanja i dinamiku materijalnih sistema?*

1* Odgovarajući na pitanje: *Ko je dao značajne doprinose da se utemelji naučna oblast pod imenom Dinamika?* - moramo se vratiti istorijskim korenima istraživanja I saznanjima koja su se vekovima stvarala.

Prema prvim poznatim dokumentima iz istorije nauke reč mehanika - *μηχανω* prvi je upotrebio *Aristotel* (364-322 godine pre nove ere), a značenje u prevodu bi bilo – uradim ili pronalazim. Medju prvim istraživačima koje pamti istorija nauke je svakako i *Arhimed* (287-212 godine pre nove ere) sa poznatim Arhimedovim zakonom.

Poljski astronom *Nikola Kopernicus* (1473-1543) svojim delom o kretanju planeta daje trajan doprinos mehanici planeta uvodeći teoriju o helio centričnom sistemu i time je pobio Ptolomejevu teoriju o geocentričnom sistemu kretanja planeta.

Sve do Galileja (*Galileo Galilei* 1564-1642) definicija sile, kao i njena primena bila je čisto statička. U svom delu “*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*” u kome je publikovao rezultate istraživanja zakona *slobodnog pada, horizontalnog i kosog hica*, 1583 godine. je uveo pojam *ubrzanja* I doveo ga u vezu sa *silom*. Time je on dao doprinos mehanici da se *kretanje tela odvija pod dejstvom sila* i praktično je otvorio kvalitativno nove pravce istraživanja i utemeljio novu naučnu oblast – *Dinamiku*.

Briljantni holandski naučnik Kristijan Hajgens (*Christian Huygens* (1629-1695)) je izučio i opisao kretanje matematičkog klatna i uveo je pojam i objasnio svojstva centrifugalne sile i time se se u pisao u zaslužne naučnike za dalji razvoj Dinamike i Teorije oscilacija. Te rezultate je opisao u svom delu “*Horologium oscillatorium*” koje publikovano 1638 godine.

Engleski naučnik Isak Njutn (*Isaac Newton* (1643-1727)) napisao je znamenito delo “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” (Matematički principi prirodne filozofije) koja je publikovana maja 1687 godine i time je dao jak oslonac daljem *razvoju Dinamike*. Ovim delom je dao nov matematički opis i dokaze izvedene čisto matematičkim putem, istovremeno objedinivši saznanja i svojih prethodnika i savremenika u jednu jedinstvenu celinu. Newton je dao Dinamici i nov matematički aparat “*diferencijalni i integralni račun*” takozvani “*infinitesimalni račun*”. Nemački naučnik filozof, matematičar i diplomata Lajbnic (*Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716)) je u svojim istraživanjima, takodje, došao do otkrića diferencijalnog računa te se u to vreme vodila velika polemika oko prioriteta u tim značajnim otkrićima.

Leonid Ojler (Leonid Euler (1707-1783)) je napiso delo “*Mechanica sive motus scientia*” koje je publikovano 1736. godine i kojim je u Dinamiku uvedena prva sistematska primena analize.

Primenu analize u Dinamici produbio je francuski naučnik Dalamber (*Jean Le Rond d’Alambert* (1717-1783)) napisavši fundamentalno delo “*Traite de Dynamique*”, koje je publikovano 1743. godine. To delo sadrži opštu metodu za postavljanje jednačina dinamike sistema i njihova rešenja. Ojleru pripada zasluga što je prvi sjedinio Statiku I Dinamiku u prirodnu celnu, jer je mirovanje i ravnoteža sistema specijalan slučaj stanja kretanja.

Još jedan velikan i Mehanike i posebno Dinamike mora biti ovde citiran, To je, takodje francuski naučnik, Lagranž (*Joseph Louis Lagrange* (1735-1813)) koji je svojom “*Analitičkom mehanikom*” (“*Mécanique Analytique*”) publikovane 1788. godine uveo čistu analitičku metodu u Mehaniku i time postavio temelje *Analitičke mehanike*. Lagranž je u ovom delu celokupnu *Statiku* postavio na osnovu *principa mogućih pomeranja*.

Razvoj Mehanike na osnovama Njutnovog znamenitog dela “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” (Matematički principi prirodne filozofije) daje Klasičnu mehaniku koja se nadmočno razvija i obogaćuje novim saznanjima. To je tako bilo sve do pred kraj 19 veka kada su se pojavila saznanja o pomeranju perihela putanje Merkura i došlo do novih otkrića fizičkih pojava koje nisu mogle da se objasne pomoću klasične mehanike, kada se javlja nova *Ajnštajnova teorija relativiteta*. Autor ove teorije je Albert Ajnštajn (*Albert Einstein* -1879) kojom je modificiran Njutnov Zakon o Opštoj (Univerzalnoj) gravitaciji.

Takodje, napominjemo i novu *E El Nashie teoriju*, kojom se proširuje pojam o dimenzionalnost prostora.

Savremena istraživanja iz oblasti dinamike odnose se na otkrića nelinearnih fenomena dinamike.

2* Odgovor na drugo pitanje - *Kojim pojmovima objasniti filozofiju i teotiju kretanja?* – nas upućuje na vekovno iskustvo i saznanja ljudske civilizacije, kao i na filozofiju nauke.

Ako prihvatimo da je Mehanika tačna prirodna nauka, tačna koliko i matematika, čak I tačnija, jer njena tvrdjenja zahtevaju pored matematičkih dokaza i eksperimentalnu proveru i verifikaciju i prirode i ljudske prakse, a i dokaze tehnologije. Mehanika je I matematička teorija vekovnom kretanju nebeskih tela, ali i tehničkoj ptaksi. Tačnost I savršenstvo tačnosti je rečativno i ocenjuje se na osnovu različitih merila. Ali u osnovi su saznanja ljudse prakse i mogućnosti ljudske prakse, posmatranja, identifikacije I realizacije.

Tvrdjenja u teoriji mehanike su *principi, zakoni i teoreme*. Ta tvrdjenja su opšte prihvaćena skoro kao i zakoni prirode. U predgovoru svoje monografije Preprincipi mehanike autor Vujičić piše:

“Mehanika je stara koliko i materijalni i pisani relikti koji svedoče o razvoju saznanja o kretanju i mirovanju tela: savremena je koliko i savremenost, jer skoro sve novo što se stvara, gradi i razgrađuje ne može se odvojiti od ove nauke”.

Filozofske klasifikacije saznanja mehanike su veoma značajna za postavljanje teorije mehanike. Filozofsko polazište, matematičko-logička koncepcija, kao i spoznaja šta su osnovni, a šta izvedeni pojmovi omogućavaju lakše prihvatanje saznanja i znanja mehanike i čine je jasnijom. Zato je značajno spoznati šta su preprincipi mehanike i koje smo prihvatili za postavljanje teorije mehanike. Takođe je važno u teoriji mehanike razgraničiti pojmove: preprincipi, osnovne definicije, zakoni dinamike, principi mehanike teoreme i leme, kao i njihova svojstva i mogućnosti upotrebe.

Naprimer, svojstvo *principa mehanike* je da je svaki od njih ponaosob dovoljan za *invarijantno razvijanje cele teorije mehanike*.

Mora se napomenuti da se ne samo u univerzitetskim udžbenicima prestižnih univerziteta u svetu, kao i u Srbiji javlja neuredjenost upotrebe tih filozofskih pojmova filozofije nauka, pa i mehanike. Jedan deo te neuredjenosti ima korene i u delima velikana mehanike.

Kako je nivo umeća u istoriji razvoja mehanike zavisio od posedovanja i razvoja matematičkih znanja, kao i od operativnosti raznih teorija, to je factor ocene valjanosti bio i ostao logička provera misaonog modelovanja mehaničkih objekata i potvrda izvedenih relacija u praksi i eksperimentu, kao i posmatranjem i merenjem promena procesa u prirodi.

Prednačelom postojanja određen je predmet razmatranja u dinamici, kao i dominantni matematički opis usmeren na njega, bez opravdane sumnje o postojanju i drugih misaonih svetova o i u mehanici. Ne smatramo da su se, izborom prednačela postojanja i dominantnog matematičkog opisa usmerenog na njega, okončala znanja o kretanju tela, ali taj izvor omogućava sistematizaciju znanja i stepenovanje nivoa saznanja, od intuitivnih shvatanja do složenih i najtananijih matematičkih dokaza i zaključaka.

Preprincip ili prednačelo definišemo kao *jasan iskaz* čija *istinitost ne podleže preispitivanju* i od koje polazi teorijska mehanika kao *prirodna nauka (filozofija) o kretanju tela*.

Znači, da su preprincipi osnovno polazište od koga polazi mehanika, kao nauka o prirodi. Preprincipi iskazuju gnoseološku pretpostavku da mehanika ima utvrdjenu interpretaciju, kao nauka o kretanju realnih tela.

Zahtev jasnosti podrazumeva da se prednačela mogu iskazati bez prethodno uvedenih pojmova i definicija, te da se lako i prosto shvataju kazana određenja koja su saglasna prethodno stečenom znanju ili naslućivanju a od značaja su za mehaniku. Prednačela su jasna po sebi i ne podstiču pitanja.

Preprincip postojanja (ontološke pretpostavke). Na osnovu nasledjenih, postojećih i stečenih znanja mehanika polazi od toga da postoje *tela, rastojanja i vreme*.

Postojanje tela u teorijskoj mehanici manifestuje se masom tela za koju je usvojena oznaka m , dok je njena dimenzija M ($\dim m = M$). To je osobina po kojoj se razlikuje telo koje postoji u mehanici (dinamici) od geometrijskog pojma tela koje karakteriše zapremina V

Postojanje rastojanja se identifikuje između čestica u prirodi, između nebeskih tela..... Rastojanje između dveju čestica se može obeležiti sa s , njegova dimenzija je $\dim s = L$.

Pojam *masena tačka* ili *materijalna tačka* razlikuje se od geometrijskog pojma tačke ne samo po tome što materijalnu tačku karakteriše masa m , a od čestice se razlikuje po tome što između čestica uvek postoji i rastojanje. Materijalna tačka se predstavlja masom m i vektorom položaja \vec{r} , dok je dimenzija njene mase M ($\dim m = M$).

Vreme se najčešće obeležava sa t , a njegova dimenzija je $\dim t = T$.

Preprincip kauzalne odredjenosti

Na osnovu preprincipa kauzalne odredjenosti [1], rastojanja, njihove promene, brzina, ubrzanje, impuls kretanja i drugi činioci kretanja materijalne tačke jednoznačno su odredjeni u toku vremena, kako u budućnosti, tako i u prošlosti, i to sa onoliko tačnošću koliko su nam poznate odrednice kretanja u bilo kom odredjenom trenutku vremena.

Preprincip invarijantnosti.

Na osnovu preprincipa invarijantnosti kretanje i svojstva kretanja materijalne tačke ne zavise od forme iskaza, jer utvrđena istina o kretanju i zapisana jednom u određenom obliku nekog jezika jednako je sadržana u zapisu drugog oblika ili drugog pisma. Ovo znači da definisano kretanje materijalne tačke možemo izražavati u različitim sistemima koordinata, i označavati određenim realnim brojevima za masu, vreme i rastojanje, ali da pri tome sva tri realiteta su invarijante.

3* Šta je zadatak Dinamike?

Zadatak Dinamike je da ispituje kretanja materijalnih tela pod dejstvom sila (Rašković). Dok su geometrija i kinematika ispitivale kretanja geometrijskih oblika ne vodeći računa o njihovoj materijalnosti, prva čak ni o vremenu, Dinamika ispituje kretanja materijalnih tela polazeći od preprincipa postojanja *mase tela, rastojanja i vremena*. Znači polazi od materijalnosti tela i vodi računa o vremenu u kome se kretanje vrši.

Svi zadaci Dinamike mogu se podeliti u dve klase: 1* zadaci-problemi određivanja sila koje proizvode kretanja materijalnih tela; 2* zadaci-problemi određivanja kretanja materijalnih tela pod dejstvom poznatih sila.

Kako je specijalan slučaj kretanja mirovanje kada je brzina tela jednaka nuli, to tada ispituujemo ravnotežu tela pod dejstvom sila, a to je I zadatak Statike, pa je ona prirodno deo dinamike.

4* I na kraju, kako primeniti teoriju i filozofiju kretanja, kao i dinamiku materijalnih sistema?

Odgovor na to pitanje student mora tražiti sam posle savladanog sadržaja i programa predmeta dinamika, profesor će se postarati da teorijski šimeri modela dinamike, kao apstrakcija realnih inženjerskih sistema, budu dovoljno inspirativni da student u svakoj konkretnoj prilici izučavajući programe predmeta struke, kao i u inženjerskoj praksi prepozna modele I identifikuje ih sa onima iz studija dinamike.

I. OSNOVNA ODREĐENJA**4.1. Osnovna odredjenja.**

Da bi smo odredili bitne pojmove mehanike materijalne tačke uvodimo sledeća osnovna odredjenja: *definiciju brzine i definiciju impulsa kretanja*, kao i *definiciju ubrzanja i definiciju inercijalne sile* [1], [2].

Definicija 1. Brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke N , mase m , čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ je granična vrednost odnosa rastojanja dva njena bliska položaja $N(t)$ i $N(t + \Delta t)$ određena vektorima položaja $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}(t + \Delta t)$ i intervala vremena Δt , za koji se ta materijalna tačka pomeri iz jednog položaja u drugi, kada taj interval vremena teži nuli:

$$\vec{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Znači da je brzina $\vec{v}(t)$ materijalne tačke, čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ po definiciji jednaka prirodnom izvodu vektora položaja $\vec{r}(t)$ po vremenu t . Brzina materijalne tačke je znači vektor, i kao takav je invarijantan pri transformaciji koordinata iz jednog u drugi sistem koordinata. Definicijom brzine uspostavlja se veza između rastojanja i vremena. Dimenzija intenziteta brzine je:

$$\dim|\vec{v}| = LT^{-1}$$

gde smo sa L označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$ dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jedinica $[sec]$. Znači da je jedinica brzine $[m sec^{-1}]$.

Definicija 2. Impuls kretanja $\vec{p}(t)$ ili $\vec{K}(t)$ materijalne tačke N , mase m , čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ je proizvod njene mase m i vektora $\vec{v}(t)$ njene brzine u tom trenutku vremena:

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} m \vec{v}(t) & \text{ili} & & \vec{K}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} m \vec{v}(t) \\ \vec{p}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} m \frac{d\vec{r}(t)}{dt} & \text{ili} & & \vec{K}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} m \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \end{aligned}$$

Znači da je impuls kretanja $\vec{p}(t)$ ili $\vec{K}(t)$ materijalne tačke N , mase m , vektor i kao takav je invarijantan u odnosu na transformacije koordinata iz jednog sistema u drugi sistem koordinata. Definicijom impulsa kretanja materijalne tačke uspostavljena je veza između mase m materijalne tačke, rastojanja i vremena. Dimenzija intenziteta impulsa kretanja materijalne tačke je:

$$\dim|\vec{p}(t)| = MLT^{-1}$$

gde smo sa M označili dimenziju mase, čija jedinica je $[gr]$ mase ili $[kg]$ mase, sa L smo označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$ dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jedinica $[sec]$. Znači da je jedinica impulsa $[kg m sec^{-1}]$ ili $[N sec]$.

Definicija 3. Ubrzanje $\vec{a}(t)$ materijalne tačke N , mase m , čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ je granična vrednost odnosa razlike njenih brzina $\vec{v}(t + \Delta t)$ i $\vec{v}(t)$ dva njena bliska položaja $N(t + \Delta t)$ i $N(t)$ određena vektorima položaja $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}(t + \Delta t)$ i intervala vremena Δt , za koji se ta materijalna tačka pomeri iz jednog položaja u drugi, kada taj interval vremena teži nuli:

$$\vec{a}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Znači da je ubrzanje $\vec{a}(t)$ materijalne tačke N , mase m , čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , po definiciji jednako prirodnom izvodu vektora njene brzine $\vec{v}(t)$ po vremenu t . Ubrzanje je vektor i kao takav je invarijantan. Definicijom ubrzanja uspostavlja se veza između rastojanja i vremena. Dimenzija ubrzanja je:

$$\dim|\vec{a}| = LT^{-2}$$

gde smo sa L označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$ dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jedinica $[sec]$. Znači da je jedinica ubrzanja $[m sec^{-2}]$.

Definicija 4. Sila inercije $\vec{I}_F(t)$ materijalne tačke N , mase m , čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ je proizvod njene mase m i suprotno usmerenog vektora njenog ubrzanja $\vec{a}(t)$ u tom trenutku vremena:

$$\vec{I}_F(t) \stackrel{\text{def}}{=} -m \vec{a}(t) \quad \text{ili} \quad \vec{I}_F(t) \stackrel{\text{def}}{=} -m \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Znači da je sila inercije $\vec{I}_F(t)$ materijalne tačke vektor i kao takav je invarijantan u odnosu na transformacije koordinata iz jednog sistema u drugi sistem koordinata. Definicijom sile inercije kretanja materijalne tačke uspostavljena je veza između mase m materijalne tačke, rastojanja i vremena. Dimenzija intenziteta sile inercije kretanja materijalne tačke je:

$$\dim|\vec{I}_F| = MLT^{-2}$$

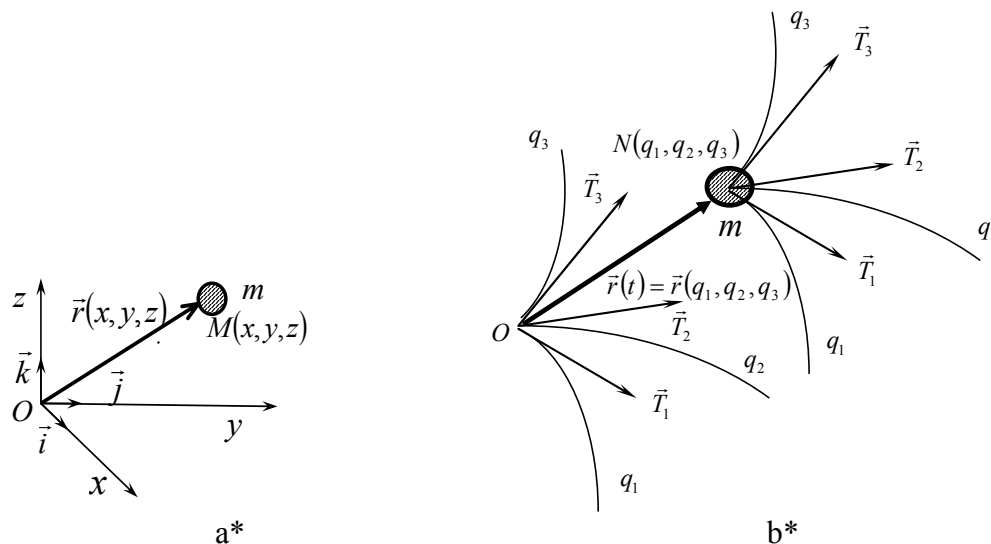
gde smo sa M označili dimenziju mase, čija jedinica je $[gr]$ mase ili $[kg]$ mase, sa L označili dimenziju dužine, čija jedinica je $[cm]$ dužine ili $[m]$ dužine, sa T dimenziju vremena, čija je jedinica $[sec]$. Znači da je jedinica sile inercije $[kg m sec^{-2}]$ ili $[N]$.

Na osnovu preprincipa kauzalne određenosti [1], rastojanja, njihove promene, brzina, ubrzanje, impuls kretanja i drugi činioci kretanja materijalne tačke jednoznačno su određeni u toku vremena, kako u budućnosti, tako i u prošlosti, i to sa onolikom tačnošću koliko su nam poznate odrednice kretanja u bilo kom određenom trenutku vremena.

Na osnovu preprincipa invarijantnosti kretanje i svojstva kretanja materijalne tačke ne zavise od forme iskaza, jer utvrđena istina o kretanju i zapisana jednom u određenom obliku nekog jezika jednako je sadržana u zapisu drugog oblika ili drugog pisma. Ovo znači da definisano kretanje materijalne tačke možemo izražavati u različitim sistemima koordinata, i označavati određenim realnim brojevima za masu, vreme i rastojanje, ali da su pri tome sva tri realiteta invarijante.

Osnovna odredjenja u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata

Neka je vektor položaja $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$ posmatrane pokretne materijalne tačke $N(q_1, q_2, q_3)$ u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata q_1, q_2 i q_3 sa ortovima orijentacije \vec{T}_1, \vec{T}_2 i \vec{T}_3 (vidi sliku 1. b*).



Slika 1. Materijalna tačka mase m u (a*) Descartes-ovom sistemu koordinata $N(x, y, z)$ u (b*) generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata $N(q_1, q_2, q_3)$

Brzina materijalne tačke je sada:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Kako je $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = A_i \cdot \vec{T}_i$, gde su A_i Lamé-ovi koeficijenti $A_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|$

$$A_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$$

i ortovi generalisanog sistema ortogonalnih krivolinijskih koordinata

$$\vec{T}_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

za koje važi uslov ortogonalnosti $(\vec{T}_i, \vec{T}_j) = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases}$

to sledi da je brzina materijalne tačke u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 A_i \dot{q}_i \vec{T}_i = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{T}_i$$

gde su v_i komponente vektora brzine u tom sistemu.

Impuls kretanja $\vec{p}(t)$ ili $\vec{K}(t)$ materijalne tačke $N(q_1, q_2, q_3)$, mase m , čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata (q_1, q_2, q_3) :

$$\vec{p}(t) = \vec{K}(t) = m \vec{v} = m \sum_{i=1}^3 A_i \dot{q}_i \vec{T}_i = m \sum_{i=1}^3 v_i \vec{T}_i = \sum_{i=1}^3 p_i \vec{T}_i \quad \text{gde je} \quad p_i = mA_i \dot{q}_i$$

Brzina materijalne tačke $N(r, \varphi, z)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata (r, φ, z) je:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{r}_0 + r \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \dot{r} \vec{r}_0 + r \dot{\varphi} \vec{c}_0 + \dot{z} \vec{k},$$

gde su $(\vec{r}_0, \vec{c}_0, \vec{k})$ jedinični vektori u radijalnom, cirkularnom i aksijalnom pravcu.

Impuls kretanja materijalne tačke $N(r, \varphi, z)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata (r, φ, z) možemo napisati u obliku:

$$\vec{p}(t) = m(\dot{r} \vec{r}_0 + r \dot{\varphi} \vec{c}_0 + \dot{z} \vec{k})$$

dok su njegove koordinate u tom sistemu

$$p_r = m\dot{r} \quad p_\varphi = mr\dot{\varphi} \quad p_z = m\dot{z}$$

Brzina materijalne tačke $N(\rho, \varphi, \psi)$ u sistemu sfernih koordinata (ρ, φ, ψ) je :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \vec{\rho}_0 + \rho \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \dot{\rho} \vec{\rho}_0 + \rho \dot{\varphi} \cos \psi \vec{c}_0 + \rho \dot{\psi} \vec{v}_0,$$

gde su $(\vec{\rho}_0, \vec{c}_0, \vec{v}_0)$ jedinični vektori u radijalnom, cirkularnom i meridijalnom pravcu

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{A_\rho} \left(\frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k} \right) = \cos \psi \cos \varphi \cdot \vec{i} + \cos \psi \sin \varphi \cdot \vec{j} + \sin \psi \cdot \vec{k}$$

$$\vec{c}_0 = \frac{1}{A_\varphi} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \vec{k} \right) = -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{A_\psi} \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \psi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \psi} \vec{k} \right) = -\sin \psi \cos \varphi \cdot \vec{i} - \sin \psi \sin \varphi \cdot \vec{j} + \cos \psi \cdot \vec{k}$$

Impuls kretanja materijalne tačke $N(\rho, \varphi, \psi)$ u sistemu sfernih koordinata (ρ, φ, ψ) je

$$\vec{p}(t) = m(\dot{\rho} \vec{\rho}_0 + \rho \dot{\varphi} \cos \psi \vec{c}_0 + \rho \dot{\psi} \vec{v}_0)$$

$$p_\rho = m\dot{\rho} \quad p_\varphi = m\rho \dot{\varphi} \cos \psi \quad p_\psi = m\rho \dot{\psi}$$

Ubrzanje materijalne tačke $N(q_1, q_2, q_3)$ u generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata (q_1, q_2, q_3) je:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{T}_i,$$

gde su a_i projekcije vektora ubrzanja u generalisanom sistemu generalisanom sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata

$$a_i = \frac{1}{A_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial q_i} \right].$$

Sila inercije $\vec{I}_F(t)$ **materijalne tačke** $N(q_1, q_2, q_3)$, **mase** m , čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ je:

$$\vec{I}_F(t) = -m \sum_{i=1}^3 a_i \vec{T}_i = -\sum_{i=1}^3 I_{F,i} \vec{T}_i$$

$$I_{F,i} = -\frac{1}{A_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial q_i} \right] = -\frac{1}{A_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} \right], \quad i=1,2,3$$

gde je $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ kinetička energija materijalne tačke.

Ubrzanje materijalne tačke $N(r, \varphi, z)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata je:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{c}_0 + \ddot{z} \vec{k}$$

gde su $(\vec{r}_0, \vec{c}_0, \vec{k})$ jedinični vektori u radijalnom, cirkularnom i aksijalnom pravcu.

Sila inercije $\vec{I}_F(t)$ **materijalne tačke** $N(r, \varphi, z)$, **mase** m , čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata je

$$\vec{I}_F = -m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{r}_0 - m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{c}_0 - m\ddot{z} \vec{k},$$

sa komponentama

$$I_{F,r} = -m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \quad I_{F,c} = -m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \quad I_{F,z} = -m\ddot{z}$$

Ubrzanje materijalne tačke $N(\rho, \varphi, \psi)$ u sistemu sfernih koordinata je:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi - \rho\dot{\psi}^2) \vec{\rho}_0 + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi} \cos^2 \psi) \vec{c}_0 + \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\psi}) + \rho\dot{\varphi}^2 \cos \psi \sin \psi \right] \vec{v}_0$$

gde su $(\vec{\rho}_0, \vec{c}_0, \vec{v}_0)$ jedinični vektori u radijalnom, cirkularnom i meridionalnom pravcu.

Sila inercije $\vec{I}_F(t)$ **materijalne tačke** $N(\rho, \varphi, \psi)$, **mase** m , čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ u sistemu polarno-cilindričnih koordinata je

$$\vec{I}_F = -m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi - \rho\dot{\psi}^2) \vec{\rho}_0 - \frac{m}{\rho \cos \psi} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi} \cos^2 \psi) \vec{c}_0 - m \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\psi}) + \rho\dot{\varphi}^2 \cos \psi \sin \psi \right] \vec{v}_0$$

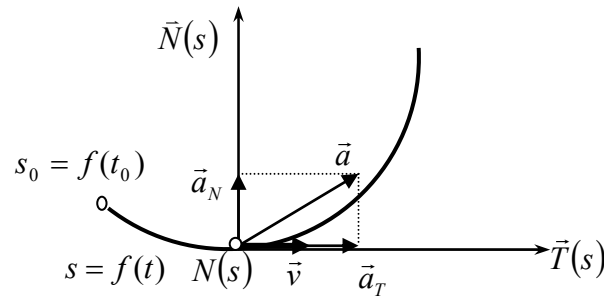
sa komponentama

$$\vec{I}_{F,\rho} = -m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi - \rho\dot{\psi}^2) \vec{\rho}_0$$

$$\vec{I}_{F,c} = -\frac{m}{\rho \cos \psi} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi} \cos^2 \psi) \vec{c}_0$$

$$\vec{I}_{F,v} = -m \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\psi}) + \rho\dot{\varphi}^2 \cos \psi \sin \psi \right] \vec{v}_0$$

Vektor brzine $\vec{v}(s)$ **pokretne materijalne tačke** $N(s)$ usmeren je po tangenti na putanju tačke po krivoj liniji, orjentisanoj ortom $\vec{T}(s)$.



$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad \text{i} \quad \vec{v} = v \cdot \vec{T}$$

Impuls kretanja materijalne tačke $N(s)$, mase m , čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ u prirodnom sistemu koordinata je:

$$\vec{p}(t) = m \frac{ds}{dt} \vec{T}$$

i pada u pravac tangente na putanju materijalne tačke.

Oskulatorna ravan je ravan krive, to je ravan koju čine tangenta na putanju pokretne tačke, sa jediničnim vektorom $\vec{T} = \vec{T}(s)$, i usmerena je u pozitivnom smeru porasta puta s i normala na krivu sa jediničnim vektorom $\vec{N} = \vec{N}(s)$, u smeru konkavne strane putanje, i vektor ubrzanja $\vec{a}(s)$ pokretne materijalne tačke $N(s)$ leži uvek u toj ravni.

U **prirodnom sistemu putanje materijalne tačke** $N(s)$ vektor ubrzanja $\vec{a}(s)$ te tačke $N(s)$ je

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{T} + \frac{v^2}{R_k} \vec{N},$$

i njegove komponente su:

$a_T = \dot{v}$ -tangencijalno ubrzanje orjentisano ortom tangente na krivolinijsku putanju

$a_N = \frac{v^2}{R_k}$ -normalno ubrzanje orjentisano ortom normale na krivolinijsku putanju

Sila inercije $\vec{I}_F(t)$ materijalne tačke $N(s)$, mase m , čiji je položaj u prostoru, u trenutku vremena t , određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ u prirodnom sistemu je:

$$\vec{I}_F = -m\vec{a} = -m \left(\dot{v} \vec{T} + \frac{v^2}{R_k} \vec{N} \right)$$

i njene komponente su:

$$\vec{I}_{F,T} = -m\vec{a}_T = -m\dot{v} \vec{T}$$

-komponenta sile inercije u tangencijalnom pravcu orjentisana ortom tangente na krivolinijsku putanju **materijalne tačke** $N(s)$, mase m ;

$$\vec{I}_{F,N} = -m\vec{a}_N = -m \frac{v^2}{R_k} \vec{N}$$

-komponenta sile inercije u pravcu normale na putanju i orjentisana ortom tangente na krivolinijsku putanju **materijalne tačke** $N(s)$, mase m .

LITERATURA

- Rašković P. Danilo, *Mehanika I - Statika*, X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1973, str.403.
- Rašković P. Danilo, *Mehanika II- Kinematika*, III i dalja izdanja, Zavod za izdavanje udžbenika, 1953, 1966, str.347.
- Rašković P. Danilo, *Mehanika III - Dinamika*, X i dalja izdanja, Naučna knjiga, 1962, str.424.
- Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
- Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
- Rašković P. Danilo, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, 1965, str. 503.
- Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.
- Andjelić P. Tatomir, *Tenzori*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965.
- Andjelić P. Tatomir, *Uvod u Astrodinamiku*, Posebna izdanja, Matematički vidici, Matematički institut SANU, 1983, str. 158..
- Milanković Milutin, *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935. 1988, str.98.
- Newton Iseek, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, (English translation bz Robert Thoop, MA, London, 196, i ruski prevod izdanje 1996)
- Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
- Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
- Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
- Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
- Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., *Аналитицхеская динамика*, Наука, Москва,1971, стр,636.
- Vujičić A. Veljko, *Preprincipi Mehanike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1995. стр. 214.
- Vujičić A. Veljko, *Preprinciples of Mechanics*, Posebna izdanja, Matematički institut SANU, 1999.
- Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies*, Dover Publications, 1988.
- Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, *Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema*, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.
- Narlamov Pavel P. Подвиг Галилея, *Институт прикладной математики и механики*, 1999.
- Narlamov Pavel P. *Разномыслие в Механике*, НАНУ, Донецк, ,1993.
- Narlamov Pavel P. *Очерки об основаниимеханики*, Наукова Думка, Киев,1995.
- Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison Wesley,Publishing Company, 1980.
- Лурье А.Н., *Аналитицхеская механика*, Москва,1961, стр,820.
- Григорьян А.Т., *Механика от Античности до наших дней*, Наука, Москва 1971, стр.219.
- Синг, Дж.,Л., *Класическая Механика*, Москва, 1983.стр. 450.
- БлехманИ.И., Мышкис А.Д., Пановко Я. Г., *Прикладная математика – Предмет, логика, особенности подходов, - Примери из механики*, УРСС, Москва, 2005. стр. 376.
- Павловский М. А., *Теоретична механика*, Техника, Киев, 2002. стр.200.
- Халфман Р. Л., *Динамика*, Наука, Москва, 1972 стр. 568 (превод с енглеског)
- Beer P. Ferdinand and Johnston E. Russel, *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dznamics*, McGrawHill Book Companz, New Zork, 1988, str. 1026.
- Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
- Kojić Miloš, *Dinamika, Teorija i primeri*, Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
- Djutić Slavko, *Mehanika III i IV – Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981, str. 460.
- Rusov Lazar, *Mehanika III – Dinamika*, Naučna knjiga, 1994, str.428.
- Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
- Raičević Vladimir, *Mehanika - Statika*, Univerzitetu Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica 2004., str. 250.