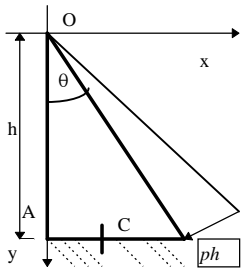


Teori ja el ast i ~nost i - Ogl edni zadaci drugi deo



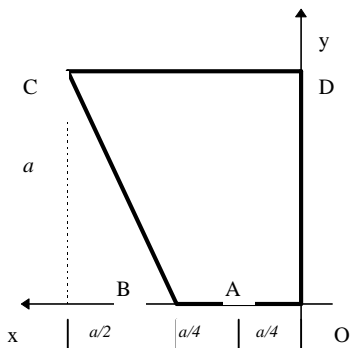
27. Tanka plo-a obl i ka pravougl og trougl a OAB, du` i ne strani ce OA = h, ugl a θ u temenu na sl obodnom kraju O, sa pravi m ugl om u ta-ki A, u kojoj je kruto ukl e{ tena (strani ca AB je el asti ~no ukl e{ tena), optere}ena je u svojoj ravni du` strani ce OB, trougaoni m raspodeqeni m optere}ewem upravni m na i stu, kako je to pri kazano na sl i ci . Odredi ti :

- kona-ne izraze za komponentne napone ako se zna da su oni linearne funkcije koordnata ta-aka plo-e;
- povr{ i nske sil e na ostal i m stranama konture plo-e OA i AB da bi takvo stawe napona bi lo mogu}e;
- ekvi val entni redukci oni di vektor - torzer u sredi { tu C el asti ~no ukl e{ tene strane AB konture plo-e;
- koordnate vektora pomerawa ta-aka plo-e;
- kona-ne izraze za pomerawe ta-aka strani ce AB konture plo-e.

28. Tanka trapezna plo-a OBCD prikazana na sl i ci osnovi ca a i a/2, vi sine a, ~ije se stawe napona mo` e def i ni sati Airy-jevom funkcijom:

$$\Phi(x, y) = -\delta \left(\frac{8}{3}x^3 - 2(a+y)x^2 + a\frac{y^2}{2} + \frac{1}{6}y^3 \right)$$

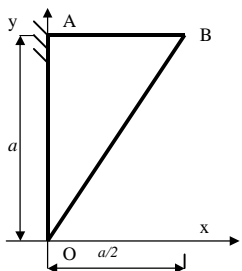
Odredi ti :



- El emente matri ce N tenzora napona u svakoj ta-ki N(x,y) plo-e;
- Spoqa{ we zapremi nsko optere}ewe;
- Spoqa{ we povr{ i nsko optere}ewo plo-e i nacrtati raspodel u povr{ i nski h sil a du` strani ca konture plo-e;
- Redukci oni di vektor u ta-ki A el asti ~no ukl e{ tene strani ce OB konture plo-e;
- Koordnate u(x,y) i v(x,y) vektora pomerawa ta-aka plo-e, \bar{s} , ako se zna da je ta-ka O(0,0) nepomi ~na i kruto ukl e{ tena (za ra-un se mo` e usvoji ti $\mu=1/4$).

29. Stawe napona u ta-kama N(x,y) homogene tanke plo-e obl i ka pravougl og trougl a def i ni sasno je pomo}u sl ede}i h normal ni h i smi ~u}i h napona:

$$\sigma_x = -p(y+a); \quad \sigma_y = 4p(a+y-x); \quad \tau_{xy} = -4px.$$

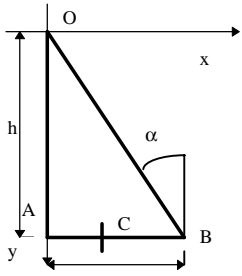


Odredi ti :

- Spoqa{ we zapremi nsko optere}ewe;
- Spoqa{ we povr{ i nsko optere}ewo plo-e i nacrtati raspodel u povr{ i nski h sil a du` strani ca konture plo-e;
- Redukci oni di vektor u redukci onoj ta-ki A el asti ~no ukl e{ tene strani ce AB ako se zna da je ta-ka A nepomi ~na i kruto ukl e{ tena;
- Pomerawa ta-ka el asti ~no ukl e{ tene strane AB.

30. Za homogenu tanku ploču sa sl. i ke. stave napona je zadato pomoću Airy-jeve funkcije:

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{6} \delta \left(\frac{2}{\operatorname{tg}^3 \alpha} x^3 - 3 \frac{x^2 y}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + y^3 \right).$$



Odredi ti:

- komponentne napone i pomoću njih sastavi ti matricu tenzora napona u proizvoljnoj tački $N(x, y)$ ploče;
 - naponske i nvarijantne stavove napona u posmatranoj tački ploče;
 - glavne pravce naprezavanja u svakoj tački ploče;
 - zapreminsku dilataciju u posmatranoj tački ploče;
 - spoljne površinske i zapreminske opterećenje;
 - ako je stranica konture AB ploče elastično ukleštena, tako da je tačka B nepokretno i tačka A pokretno i { te u pravcu x-ose, odredi ti redukcionu vektoru tački C - središnju tačku;
- g) komponentna pomeranja ako se zna da je tačka B nepokretno i tačka A pokretno i { te u pravcu x-ose;
- h) rezultujuće pomeranje tačke O.

31. Stav napona u ploči jedinične debljine zadato je pomoću komponentnih napona:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{q}{2I} \left[y(\ell^2 - x^2) + \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} h^2 y \right) \right]; \quad \sigma_y(x, y) = \frac{-q}{2I} \left[\frac{1}{3} y^3 - h^2 y + \frac{2}{3} h^3 \right];$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{q}{2I} (h^2 - y^2) x \quad I = \frac{2}{3} h^3;$$

Proveri ti granične uslove i Navier-ove jednačine ravnoteže. Odredi ti raspored površinskih sila na ostalim stranama konture. Ploča je pravougaonog oblika stranica $2a$ i 2ℓ i opterećena je kontinualnim jednako podećenim opterećenjem q duž konturne stranice 2ℓ upravno na tu stranu i u ravni ploče.

32. Stav napona u nekoj tački $N(x, y, z)$ napregnute ploče (dužine 2ℓ , visine $2c$ i jedinične debljine) definišano je sljedećim normalnim i smičućim naponima:

$$\sigma_x = -\frac{3\gamma}{2c^2} (\ell^2 - x^2) y - \gamma \left(\frac{2}{5} - \frac{y^2}{c^2} \right) y; \quad \sigma_y = \frac{1}{2} \gamma \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right) y; \quad \tau_{xy}(x, y) = -\frac{3}{8} \gamma \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right) x.$$

Odredi ti:

- Zapreminske sile koje dejstvuju na ploču;
- Spoljne površinske sile koje dejstvuju na ploču;
- Dilataciju i klizavni zapreminski laticiju;
- Naponske i nvarijantne;
- Komponentna pomeranja.

33. Za konzolnu tapeliptičnog poprečnog preseka, poluosa a i b , dužine l , modula klizavog G , koji je opterećen na uvišini odredi ti:

- naponsku funkciju;
- komponentne smičuće napone;
- rezultujući tangencijalni napon u proizvoljnoj tački $N(x, y)$;
- najveće vrednosti rezultujućeg smičućeg napona;
- Komponentna pomeranja tačka;
- analizirati kako se deformira u poprečnim preseccima;
- odredi ti geometrijska mesta tačka konstantnih pomeranja u pravcu geometrijske ose (tapa i skicirati ih);

34. [upqi sferni sud , polupre-nika $R_s = 200$ /mm/ i $R_u = 100$ /mm/ izlo` en je dejstvu ravnomernog unutra{ weg pri ti ska $p_u = 280$ /MPa/. Spoqa{ wi pri ti sak se mo` e smatrati zanemarqi vi m.

Odredi ti :

- pomerawa ta~aka suda;
- komponentne napone: radi jal ni , ci rkul arni i meri di jal ni ;
- napne u ta~kama na pol ovi ni debqi ne sfernog suda;
- mi ni mal ne i maxi mal ne vrednosti komponentni h napona;
- za kol i ko se promeni debqi na zi da { upqeg sfernog suda.

35. [tap pravougaonog popre~nog preseka strani ca $2a$ i $2b$, du` i ne l , napregnut je tako da je u ta~ki $N(x,y,z)$ stawe napona odre|eno sl ede}i m komponenti m naponi ma:

$$\tau_{zx}(x,y) = C \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{Sh} \frac{(2n+1)\pi y}{2a} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{(2n+1)^2 \text{Ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}}; \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0;$$

$$\tau_{zx}(x,y) = -C \left[x - \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{Ch} \frac{(2n+1)\pi y}{2a} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{(2n+1)^2 \text{Ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right]$$

Odredi ti :

- spoqa{ wa povr{ i nska optere}ewa koja i zazi vaju takvo stawe napona ,
- ako se zna da se zapremi nske si l e mogu smatrati jednaki m nul i ;
- komponentna pomerawa koja odgovaraju takvom stawu napona.

36. [tap popre~nog preseka obl i ka jednakostrani ~nog trougl a vi si ne $3a$, du` i ne l optere}en je na uvi jawe. Odredi ti :

- naponsku f unkciju;
- komponentne napone;
- komponentna pomerawa;
- raspored povr{ i nski h si l a.

37. Stawe napona u ta~ki $N(x,y,z)$ napregnutog tel a zadato je matri com N tenzora napona u si stemu koordi nata N_{xy} u obl i ku:

$$N = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 15 + 2\sqrt{2} & -3 & -2 + 3\sqrt{2} \\ -3 & 15 - 2\sqrt{2} & -(2 + 3\sqrt{2}) \\ -2 + 3\sqrt{2} & -(2 + 3\sqrt{2}) & 18 \end{bmatrix}$$

Odredi ti :

- gl avne napone i gl avne pravce naprezawa;
- ekstremne vrednosti smi ~u}i h napona.

38. Za konzol ni { tap du` i ne l popre~nog preseka obl i ka jednakostrani ~nog trougl a vi si ne $3a$, poznati su smi ~u}i naponi u obl i ku:

$$\tau_{zx}(x,y) = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^4} [-x^2 + a(2a + y)]; \quad \tau_{zy}(x,y) = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^4} [x(a - y)]$$

a, tako |e, je poznato da su svi ostal i komponentni naponi osi m σ_z jednaki nul i . Mo` e se usvoji ti da su i zapremi nske si l e jednake nul i .

Odredi ti :

- da l i su zadovoljene jedna~i ne ravnote` e i pod koji m usl ovi ma;
- spoqa{ we povr{ i nsko optere}ewe;
- komponentna pomerawa.

39. Za konzolni { tap du` i ne / popre~nog preseka obl i ka jednakostrani ~nog trougl a vi si ne 3a, poznati su smi ~u}i naponi u obl i ku:

$$\tau_{zx}(x,y) = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^4}[-x^2 + a(2a+y)]; \quad \tau_{zy}(x,y) = \frac{2\sqrt{3}P}{27a^4}[x(a-y)]$$

a, tako |e, je poznato da su svi ostal i komponentni naponi osi m σ_z jednaki nul i . Mo` e se usvoji ti da su i zapremi nske si l e jednake nul i .

Odredi ti :

- da l i su zadovoljene jedna~ine ravnote` e i pod koji m usl ovi ma;
- spoqa{ we povr{ i nsko optere}ewe;
- komponentna pomerawa.

40. Stawe napona u tankoj pravougaonoj pl o~i strani ca 2c i / el asti ~no ukl e{ tenoj du` konturne strani ce AB zadato je :

$$\sigma_x(x,y) = q \frac{xy}{4c^3} \left[x^2 - 2y^2 + \frac{6}{5}c^2 \right]; \quad \sigma_y(x,y) = -q \frac{x}{4} \left[2 - \frac{y^3}{c^3} - 3\frac{y}{c} \right];$$

$$\tau_{xy}(x,y) = q \frac{1}{8c^3} (c^2 - y^2) \left[3x^2 - (c^2 + y^2) + \frac{6}{5}c^2 \right]$$

- Odredi ti povr{ i nske i zapremi nske si l e koje dejstvuju na pl o~u.
- l zvr{ i ti redukciju si l a na sredi ne strani ca kontura pol o~e radi odre| i vawa stati ~ki ekvi val entnog dejstva si l a akti vni h i l i reakti vni h na pojedine strani ce konture pl o~e.

41. Poznate su koordi nate vektora pomerawa:

$$u(x,y,z) = \mu \frac{m}{2} \left[(x^2 - y^2) + \frac{1}{\mu} z^2 \right]; \quad v(x,y,z) = \mu m xy; \quad w(x,y,z) = -m xz$$

homogenog prizmati ~nog { tapa popre~nog preseka glavnih momenata inercije povr{ i ne popre~nog preseka $I_x = I_1$ i $I_y = I_2$, materi jal a modula el asti ~nosti E i Poisson-ovog koef i ci jenta popre~ne kontrakci je μ .

Odredi ti :

- di l ataciju i klizawe i napisati matri cu tenzora relativne deformacije u svakoj ta~ki $N(x,y,z)$;
- Kol i ka je zapremi nska di l ataci ja;
- komponentne napone i napi sati matri cu tenzora napona;
- sferni deo matri ce tenzora rel ati vne deformaci je i devi jator deformaci je;
- sferni deo matri ce tenzora naponai devi jator napona.
- Odredi ti spoqa{ we povr{ i nske si l e koje dejstvuju na konturnoj povr{ i .
- Koja ekvi val entna stati ~ka optere}ewa mogu i zazvati takva pomerawa { tapa?
- Odredi ti koordi nate vektora rotacvi je u svakoj ta~ki deformisanog { tapa.

42. Za stawe napona u ta~ki $N(x,y,z)$ napregnutog tela ~i je je stawe napona zadato matri com N tenzora napona u si stemu koordi nata x,y,z ~i ji su el ementi i zra` eni u /MPa/ :

$$N = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & -10 & 10\sqrt{2} \\ -10 & 10\sqrt{2} & 10 \end{bmatrix}.$$

Napi sati naponske povr{ i za zadati si stem koordi nata i za si stem koordi nata ~i je se ose pokl apaju sa gl avni m pravci ma naprezawa.

43. Odredi ti totalni i komponentne oktaedarske napone u ta-ki $N(x,y,z)$ napregnutog tela -i je je stave napona zadato matri com N tenzora napona -iji su elementi izra`eni u MPa:

$$N = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Tako je, u sistemu Oxyz odredi ti ortove pravaca komponentnih napona za oktaedarsku ravan u posmatrnoj ta-ki kao i ort normale na oktaedarsku ravan za zadato stave napona.

44. Homogeni prizmati -ni { tap kru`nog popre-nog preseka pol upre-ni ka R , du`ine l , modul a elasti -nosti materijal a E , Poisson-ovog koef i cijenta popre-ne kontrakcije μ deformisan je tako da su wegove ta-ke $N(x,y,z)$ dobi le pomerawa u pravci ma koordi natnih osa x,y i z :

$$u(x,y,z) = -\mu m \left(1 - \frac{z}{\ell}\right)x; \quad v(x,y,z) = -\mu m \left(1 - \frac{z}{\ell}\right)y; \quad w(x,y,z) = m \left[z \left(1 - \frac{2z}{\ell}\right) - \frac{\mu}{2\ell} (x^2 + y^2) \right];$$

- Kol i ka su pomerawa ta-aka geometrijske ose { tapa?
- Da li i pstoje ta-ke koje se ne pomeraju?
- Kol i ko sus se pomeri le ta-ke na cil i ndri`noj povr{ i pol upre-ni ka r ?
- Da li je pri prelasku { tapa iz pri rodne u pri nudnu konfi guraciju nastupi la depl anacija popre-nih preseka i ako jeste kakve su to sada povr{ i?
- Odredi ti elemente matri ce tenzora rel ati vne deformacije.
- Odredi ti normalne i smi -u}e napone u ta-ki $N(x,y,z)$ napregnutog { tapa.
- Odredi ti spoqa{ wa zapremi nska i povr{ i nska optere}ewa koja i zazi vaju ovakva pomerawa.

45. Za slu-} naprezawa homogenog prizmati -nog { tapa proizvoqnog popre-nog preseka jednostruko povezane oblasti , du`ine l , geometrijske Oz ose stave napona se mo`e def i ni sati pomo}u naponske f unkcije $\Phi(x,y)$ u obli ku:

$$\tau_{xz}(x,y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}; \quad \tau_{yz}(x,y) = -\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}; \quad \tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0.$$

Odredi ti :

- uslove koje zadovoljava naponska f unkcija ;
- koordinate $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ i $w(x,y,z)$ vektora pomerawa ta-aka, \vec{s} , ako se zna da je ta-ka $A(0,0,0)$ nepokretna i kruto ukl e{ tena;
- povr{ i nske sil e koje i zazi vaju takvo stave napona.

46. Za { tap pravougaonog popre-og preseka stranic a $2a$ i $2b$, du`ine l , modul a kl i zawa G , koji je optere}en na uvi jawe spregom momenta M_t odredi ti :

- naponsku f unkciju;
- komponentne napone;
- najve}e vrednosti smi -u}ih napona;
- komponentna pomerawa ta-aka { tapa;
- ugao zaokretawa { tapa oko geometrijske ose;
- ako je $a = 2b$ odredi ti komponentne napone zadr`avaju}i dva -l ana reda.

47. Prostorno stave deformacija u ta-ki $N(x,y,z)$ deformisanog i dealno elastičnog tela, u pri nudnoj konfiguraciji zadato je matricom E tenzora relati vne deformacije kao:

$$E = 10^{-4} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

u kojoj je $\epsilon_x = 4 \cdot 10^{-4} \text{ cm/cm}$. Odredi ti :

a) direkciju i nijski h el emenata povu-eni h iz te ta-ke u pravci ma odre |jeni m jedni -ni m vektorima:

$$\bar{n}_a = \frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) ; \bar{n}_b = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}).$$

Kol i ka je promena ugla i zme |ju ovi h l i nijski h el emenata?

b) vektor total ne spveci f i -ne deformacije za oktaedarke pravce.

c) kol i ko se mewa ugao i zme |ju pojedini h l i nijski h el emenata povu-eni h iz iste ta-ke u oktaedarskim pravcima.

d) Napi sati jedna -i nu deformacijske povr{ i u posmatranoj ta-ki kao i Lamé'-ov el i psi d napona?

48. Konzola du`ine l , popre-nog preseka obl i ka jednakostrani -nog trougla vi si ne $3a$, optere}ena je na sl obodnom kraju spoqa{ wi m optere}ewem ekvi val entnog stati -kog dejstva dejstvu ekscentri -ne si le i ntenzi teta P i ekscentri teta a .

Odredi ti :

a) komponente matrice tenzora napona;

b) komponente matrice tenzora relati ven deformacije;

c) raspored povr{ i nskih sila na sl obodnoj osnovi i ukl e{ tewu;

d) komponentna pomerawa ta-aka grede;

e) koji je opasniji sl u-aj ekscentri teta si le: sa poziti vni m i l i negati vni m ekscentri tetom.

49. Homogeni prizmatni { tap kru`nog popre-nog preseka pol upre-ni ka R , du`ine l , modula elasti -nosti materijala E , Poisson-ovog koef i cijenta popre-ne kontrakcije μ deformisan je tako da su wegove ta-ke $N(x,y,z)$ dobi le pomerawa u pravci ma koordinatnih osa x, y, z :

$$u(x,y,z) = -\mu m \left(1 - \frac{z}{\ell}\right)x; \quad v(x,y,z) = -\mu m \left(1 - \frac{z}{\ell}\right)y; \quad w(x,y,z) = m \left[z \left(1 - \frac{2z}{\ell}\right) - \frac{\mu}{2\ell} (x^2 + y^2) \right];$$

a) Kol i ka su pomerawa ta-aka geometrijske ose { tapa?

b) Da li postoje ta-ke koje se ne pomeraju?

c) Kol i ko su se pomeri le ta-ke na cil i ndri`noj povr{ i pol upre-ni ka r ?

d) Da li je pri prelasku { tapa i z pri rodne u pri nudnu konfiguraciju nastupi la depl anacija popre-nih preseka i ako jeste kakve su to sada povr{ i ?

e) Odredi ti el emente matrice tenzora relati vne deformacije.

f) Odredi ti normalne i smi -u}e napone u ta-ki $N(x,y,z)$ napregnutog { tapa.

g) Odredi ti spoqa{ wa zapremnska i povr{ i nska optere}ewa koja i zazi vaju ovakva pomerawa.

50. Poznate su koordinate vektora pomerawa:

$$u(x,y,z) = \mu \frac{m}{2} \left[(x^2 - y^2) + \frac{1}{\mu} z^2 \right]; \quad v(x,y,z) = \mu m xy; \quad w(x,y,z) = -m xz$$

homogenog prizmatnog { tapa popre-nog preseka glavnih momenata inercije povr{ i ne popre-nog preseka $I_x = I_1$ i $I_y = I_2$, materijala modula elasti -nosti E i Poisson-ovog koef i cijenta popre-ne kontrakcije μ .

Odredi ti :

a) direkciju i kl i zawi napi sati matricu tenzora relati vne deformacije u svakoj ta-ki $N(x,y,z)$;

b) Kol i ka je zapremnska direkcija;

c) komponentne napone i napi sati matricu tenzora napona;

d) sferni deo matrice tenzora relati vne deformacije i devijator deformacije;

e) sferni deo matrice tenzora naponai devijator napona.

f) Odredi ti spoqa{ we povr{ i nske si le koje dejstvuju na konturnoj povr{ i .

g) Koja ekvi val entna stati -ka optere}ewa mogu i zazvati takva pomerawa { tapa?

h) Odredi ti koordinate vektora rotacije u svakoj ta-ki deformisanog { tapa.