

# Teori ja el ast i ~nosti - Ogl edni zadaci

1. U ta-ki  $N(x,y)$  ravne napregnute plo-e stawe napona je def i ni sano matri com tenzora napona:

$$N = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

~i ji su el ementi i zra` eni u MPa , odnosno ,  $\sigma_x = 14$ [MPa].

Odredi ti total ni i komponentne napone za presek sa normal om  $\vec{n}$  koja zakl apa ugao  $\varphi$  sa  $N_x$  -osom , a za koji je  $\operatorname{tg}\varphi = 4/3$ . Odredi ti gl avne napone i gl avne pravce naprezawa.

2. I zvr{ i ti transformaciju matri ce  $N$  tenzora napona ako se zna da je u ta-ki  $N(x,y)$  napregnute plo-e zadato stawe napona pomo}u:

$$N = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

u kojoj je  $\sigma_x = 10$ [MPa], tako da se wome i zrazi i sto stawe u si stemu koordi nata ~i je su ose zaokrenute za  $45^\circ$  u odnosu na prethodni si stem koordi nata u i stoj ravni .

3. Prostorno stawe napona u ta-ki  $N(x,y,z)$  napregnutog tela zadato je matri com  $N$  tenzora napona u si stemu  $x,y,z$  kao:

$$N = \begin{bmatrix} 14 & 4 & -2 \\ -2 & 10 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

u kojoj je  $\sigma_x = 14$ [MPa].

- Odredi ti total ne i komponentne napone u toj ta-ki za ravan sa normal om odre|enom ortom  $\vec{n}$  ~i ji su kosi nusi smerova  $2/7, 3/7, ?$  .
- Odredi ti naponske i nvarijante kao i zbi ri i prol izvod gl avni h napona.

4. Prostorno stawe napona u ta-ki  $N(x,y,z)$  napregnutog tela zadato je matri com  $N$  tenzora napona kao:

$$N = \begin{bmatrix} 40 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 10 \\ 10 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

u kojoj je  $\sigma_x = 40$ [MPa].

- Odredi ti gl avne napone i gl avne pravce naprezawa.
- Napi sati matri cu  $G$  tenzora napona u si temu koordi nata gl avni h pravaca naprezawa za zadato stawe napona.
- Napi sati jedna~i nu Cauchy -jeve naponske povr{ i i jedna~i nu Lamé'- ovog el i psoida napona.

5. Odredi ti total ni i komponentne oktaedarske napone u ta-ki  $N(x,y,z)$  napregnutog tela ~i je je stawe napona zadato matri com  $N$  tenzora napona ~i ji su el ementi i zra` eni u MPa:

$$N = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Tako je, u si stemu  $Oxyz$  odredi ti ortove pravaca komponentni h napona za oktaedarsku ravan u posmatrnoj ta-ki kao i ort normal e na oktaedarsku ravan za zadato stawe napona.

7. Stawe napona u ta~ki  $N(x,y,z)$  napregnutog tela zadato je matricom  $N$  tenzora napona u sistemu koordinaata  $N_{xyz}$  u obliku:

$$N = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 15+2\sqrt{2} & -3 & -2+3\sqrt{2} \\ -3 & 15-2\sqrt{2} & -(2+3\sqrt{2}) \\ -2+3\sqrt{2} & -(2+3\sqrt{2}) & 18 \end{bmatrix}$$

Odredi ti:

- glavne napone i glavne pravce naprezawa;
- ekstremne vrednosti smislih napona.

8. Za stawe napona u ta~ki  $N(x,y,z)$  napregnutog tela zadato je matricom  $N$  tenzora napona:

$$N = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 37 & -5\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 47 & -6 \\ 2\sqrt{3} & -6 & 60 \end{bmatrix}$$

Napisati jedna~ine Mohr-ovih krugova napona i pomo~u njih odredi ti ekstremne smislih vrednosti smislih napona.

9. Za stawe napona u ta~ki  $N(x,y,z)$  napregnutog tela zadato pomo~u matrice  $N$  tenzora napona u sistemu koordinaata  $N_{xyz}$ :

$$N = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 21 & -5\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 31 & -6 \\ 2\sqrt{3} & -6 & 44 \end{bmatrix}$$

odredi ti sferni i devijatorski deo matrice tenzora napona u sistemu  $N_{xyz}$ , odnosno, u sistemu  $N_{\xi\eta\zeta}$  -ije su ose u pravci glavnih pravaca naprezawa.

10. Kvadratna plo~a  $ABCD$  koja le~i u ravni  $Oxy$  sa strani cama  $AB$  i  $AD$  u pravci glavnih koordinaatnih osa  $Ox$  i  $Oy$  napregnuta je spoqa~wim povr~inskim silama koje su tangencijalne na stranice plo~e i imaju specifi~ne vrednosti jednake  $\tau$ .

Pokazati da veli~ina tangencijalnog napona za te stranice ima vrednost jednaku normalnom naponu za prese~nu ravan u pravcu dijagonale  $BD$ .

11. U ta~ki  $N(x,y,z)$  napregnutog tela poznata je prva invarijanta  $N_1 = 30 / \text{MPa}$  stawa napona kao i matrica  $D^{(\sigma)}$  devijatora napona tog stawa:

$$D^{(\sigma)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 15 \\ -15 & 15 & -10 \end{bmatrix}$$

- Sastavi ti sekularnu jedna~inu za odre~enje glavnih napona u posmatranoj ta~ki za zadato stawe napona.
- Odredi ti totalne i komponentne napone u toj ta~ki za ravan sa normalom odre~enom ortom  $\bar{n}$  -iji su kosinusi smerova  $2/7, 3/7, ?$ .

12. Pri popre~nom savijawu konzole pravougaonog popre~nog preseka u ravni  $xz$ , spoqa~wa povr~inska sila, ukupnog intenziteta  $P$ , jednako je raspodeqena po osnovi slobodnog kraja konzole po sljede~em zakonu:  $p_{xy} = -\frac{P}{2I_y} \left[ \frac{h^2}{4} - z^2 \right]$ .

Komponente tenzora napona, prema podacima iz Otpornosti materijala izra~avaju se na sljede~i na~in:

$$\sigma_x = \frac{P(\ell - x)}{I_y} z; \tau_{xz} = -\frac{P}{2I_y} \left[ \frac{h^2}{4} - z^2 \right]; \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0.$$

Proveri ti, da li su zadovoljene Navier-ove jedna~ine ravnote~e i Cauchy-jevi grani~ni uslovi na konturnoj povr~i konzole. Pretpostavqamo da su zapreminske sile jednake nuli.

13. Usvojivši formulu iz Otpornosti materijala za  $\sigma_x$ , izvesti formule za napone  $\tau_{zx}$  i  $\sigma_z$ , koji se javljaju okolini tačke A na donjem delu tankozidnog profila ako je nosač opterećen na tom delu kontinualnim opterećenjem  $q$ .

Na slici je prikazan deo nosača i poprečni presek profila, sa odgovarajućim kontinualnim opterećenjem  $q$ . Pretpostavi ti da su zapremske sile jednake nuli.

14. Za prostu gredu opterećenu kontinualnim jednakopodećenim opterećenjem

a) proveriti tačnost formula iz Otpornosti materijala za  $\sigma_x$  i  $\tau_{xy}$ ;

b) izvesti formulu za  $\sigma_y$ , pretpostavljajući za osnovu izvođenja formulu za  $\tau_{xy}$  iz Otpornosti materijala. Pretpostavi ti da su zapremske sile jednake nuli.

15. Za tačku  $M(x,y,0)$  u konzoli koja je opterećena trouglastim raspodećenim opterećenjem, sastavi ti izraze za komponentne napone: normalni  $\sigma_x$  i tangencijalni  $\tau_{xy}$  polazeći od formula iz Otpornosti materijala, a zatim izvesti formulu za normalni napon  $\sigma_y$  primenjujući pri tome Navier-ove diferencijalne jednačine ravnoteže. Pretpostavi ti da su zapremske sile jednake nuli.

16. U posmatranoj tački  $N(x,y,z)$  napregnutog tela poznati su sledeći komponentni naponi  $\sigma_x$  i  $\tau_{xy}$ :

$$\sigma_x = Ax^3y^2z, \quad \tau_{xy} = Bxy^2z^3.$$

Napisati sa tačnom do funkcije  $f(x,y)$  izraz za  $\tau_{xy}$ , ako zapremske sile možemo zanemariti i li pretpostavi ti njihovo odsustvo.

17. Izvršiti transformaciju matrice  $E$  tenzora relativne deformacije, ako se zna da je stave deformacije deformisane ploče zadato u sistemu koordinata  $Nxyz$  pomoću sledeće matrice:

$$E = 10^{-4} \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Ose novog koordinatnog sistema su zaokrenute za  $45^\circ$  u odnosu na referentni sistem koordinata.

18. U tački  $N(x,y)$  ravne ploče stave deformacije je zadato matricom relativne deformacije:

$$E = 10^{-4} \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

Odredi ti:

- vektor ukupne specifične deformacije u tački N za l i nijske elemente povučene u pravcu orta  $\vec{n}$  i j i je  $\tan \varphi = 4/3$  i u pravcu ortogonalnom na prethodni ort;
- kl i zave i zmeju ti h l i nijski h el emenata pri prelasku iz pri rodne u pri nudnu konfiguraciju;
- glavne pravce dilatacija i glavne dilatacije;
- pravce i zmeju koji h se javljaju najveće kl i zawa; Kol i ke su dilatacije ti h l i nijski h el emenata?

19. Stave deformacija elastične ploče u tački  $N(x,y)$  zadato je matricom  $E$  tenzora relativne deformacije iji su elementi dilatacije  $\epsilon_x$  i  $\epsilon_y$  i kl i zave  $\gamma_{xy}$ :

$$\epsilon_x = a + b(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4)$$

$$\epsilon_y = c - d(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4)$$

$$\epsilon_z = e + fxy(x^2 + y^2 + g)$$

Da li je moguće takvo stave deformacija i pod kojim uslovima?

20. Ravno stave deformacije u tački  $N(x,y)$  deformisane ploče zadato je funkcijom  $f(x,y)$  pomoću koje su izražene dilatacije  $\epsilon_x$  i  $\epsilon_y$  i nijski h el emenata kao i kl i zave  $\gamma_{xy}$  i zmeju njih na sledeći način:

$$\epsilon_x = a \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - b \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}; \quad \epsilon_y = a \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = -c \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}; \quad c = 2a + 2b$$

Koji uslov mora da zadovoljava funkcija  $f(x,y)$  da bi takvo stave deformacija bilo moguće?

21. Stave deformacija u ta-ki  $N(x,y,z)$  homogenog pri zmati -nog { tapa sa geometrijskom Oz osom zadato je matri com E tenzora speci fi -ne deformacije -iji su el ementi :

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -a z; \epsilon_z = b z; \gamma_{xy} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0.$$

Odredi ti koordi nate vektora pomerawa  $\vec{s}$ , ako se zna da je ta-ka  $A(0,0,1)$  nepokretna, a presek koji prol azi kroz tu ta-ku ukl e{ ten.

(Ovo je sl u-aj deformi sawa konzol e ukl e{ tene sa dowe strane a i zl o` ene dejstvu sopstvene te` i ne.)

23. Stave deformacija u ta-ki  $N(x,y,z)$  homogenog pri zmati -nog { tapa sa geometrijskom Oz osom zadato je matri com E tenzora speci fi -ne deformacije -iji su el ementi :

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -a y; \epsilon_z = b y; \gamma_{xy} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0.$$

a) Pokazati da su zadovoljeni Saint-Venant-ovi uslovi kompatibilnosti deformacija.

b) Odredi ti koordi nate vektora pomerawa  $\vec{s}$ , ako se zna da je ta-ka  $A(0,0,0)$  nepokretno l e` i { te, a ta-ka  $B(0,0,1)$  pokretno l e` i { te u pravcu Az- ose, a ne postoji uvi jawe preseka { tapa.

v) Napi sati jedna-ine elasti -ne l inije koja postaje deformacijom geometrijskog mesta ta-aka - geometrijske ose { tapa i pokazati da preseki  $z = \text{const}$  ne trpe depl anaciju.

24. U ta-ki  $N(x,y,z)$  napregnutog tela stave deformacija je zadato pomo}u tri di l atacije i tri kl i zawa:

$$\epsilon_x = 10 \cdot 10^{-4}; \epsilon_y = 9 \cdot 10^{-4}; \epsilon_z = 8 \cdot 10^{-4};$$

$$\gamma_{xy} = 4 \cdot 10^{-4}; \gamma_{zx} = 0; \gamma_{yz} = 4 \cdot 10^{-4}.$$

a) Sastavi ti matri cu E tenzora speci fi -ne deformacije za zadato stawe napona.

b) Odredi ti gl avne di l atacije i pravce gl avnih di l atacija.

c) I zvr{ i ti transformaciju matri ce tenzora speci fi -ne deformacije na koordi natni si stem gl avnih pravaca di l atacija.

d) Napi sati jedna-ine deformacijskih povr{ i .

e) Odredi ti l nvarijante devijatora deformacije.

f) Odredi ti vektor deformacije za l inijski el ement u oktaedarskom pravcu a za l inijski el ement vlakno du` i ne 10/cm/.

25. U ta-ki  $N(x,y,z)$  deformisanog i deal no elasti -nog tela stave deformacija je def i ni sano pomo}u matri ce E tenzora speci fi -ne deformacije:

$$E = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

u kojoj je  $\epsilon_x = 1 \cdot 10^{-4} \text{ cm/cm}$ . Odredi ti :

a) Di l ataciju l inijski h el emenata povu- enih iz te ta-ke u pravci ma odre | eni m jedni -ni m vektorima:

$$\vec{n}_a = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k}) ; \vec{n}_b = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

b) Kol i ka su izdu` ewa l inijski h el emenata koji su def i ni sani u prethodnoj ta-ki ako je wi hova du` i na u pri rodnom stawu  $\sqrt{2} / \text{mm}$  i da l i } e se ugao i zme | u wi h pove } ati ? Kol i ka je promena ugl a i zme | u ovi h l i ni jski h el emenata?

c) pravce l inijski h el emenata povu- enih iz te ta-ke koji ne mewaju svoju orijentaciju pri deformaciji deformabilnog tela. Kol i ke su di l atacije ti h l inijski h el emenata ? Da l i i zme | u wi h postoji kl i zawe?

d) Di l ataciju i kl i zawe l inijski h el emenata povu- enih iz te ta-ke u oktaedarskim pravcima.

e) Pravce i zme | u koji h postoje najve } e promene ugl ova pri deformaciji kl i zawa.

f) Ortogonalne pravce l inijski h el emenata za koje su jednake di l atacije.

26. Tanka plo- a obl i ka jednakokrake trougaone plo- e osnove  $2a$ , vi si ne  $a$ , sa i zva | eni m pol ukrugom pol upre- ni ka  $a/2$  ravno je napregnuta po konturi tako da se stawe napona mo` e def i ni sati Airy-jevom funkcijom:

$$\Phi(x,y) = \frac{p}{2}(a + bx + cy + x^2 + y^2)$$

Odredi ti :

a) El emente matri ce N tenzora napona u svakoj ta-ki plo- e;

b) Zapremnske l e;

c) Spoqa{ wa povr{ i nska optere } ewa po konturi plo- e i nacrtati raspored ti h povr{ i nski h sil a;

d) Koordi nate vektora pomerawa ta-aka plo- e ako se zna da je u zami { qenoj ta-ki  $O(0,0)$  plo- a kruto ukl e{ tena; Komponentna pomerawa ta-aka na strani cama AE, DC konture i ta-aka na du` i BF.

