ELASTODINAMIKA

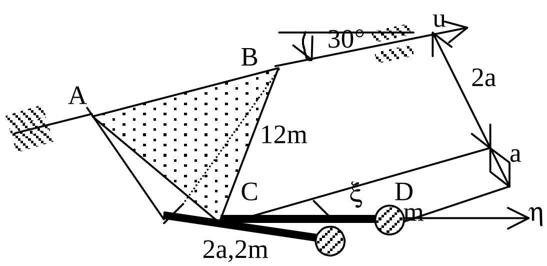
ELASTODINAMIKA

Re{ewa ispitnih zadataka iz
septembarskog ispitnog roka 2001(22 avgust 2001)

1.Zadatak: Zadatkom sa tra`i da se odredi kru`na frekvencija malih oscilacija prikazanog sistema, koji zapravo predstavqa “koso” fizi~ko klatno, ~ija je osa nagnuta u odnosu na horizont za ugao α=30°. Period oscilovawa fizi~kog klatna, kako je iz terije poznato, je:

$$T=\sqrt{\frac{J_u}{Gs}}\,,$$

gde je J_u - aksijalni moment inercije mase sistema za osu u, G- komponenta sile te`ine sistema, koja je normalna na osu oscilovawa, $G=Mg\cos\alpha$, gde je M masa sistema; $s$ - normalno rastojawe centra mase sistema od ose oscilovawa $u$. Kvadrat kru`ne frekvencije malih oscilacija “kosog” klatna je :



$$\omega^2=\frac{Mgs\cos\alpha}{J_u}=\frac{24\sqrt{3}}{89}\frac{g}{a}\,,$$

jer je

$$s=y_T=\frac{\sum_{i=1}^{3}m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3}m_i}=\frac{16}{15}a\,,$$

$$M=\sum_{i=1}^{3}m_i=15m\,,$$

$$J_u=J_u^{\Delta}+J_u^{\{}+J_u^{m}=\frac{89}{3}ma^2\,;$$

gde su:

$$J_u^{\Delta}=\rho_p\frac{bh^3}{12}=\frac{3m\sqrt{3}}{a^2}\frac{4a\sqrt{3}}{3}\frac{1}{12}(2a)^3=8ma^2\,,$$

aksijalni moment inercije mase plo~ice za osu u;

$$J_u^{m}=(3a)^2m=9ma^2\,,$$

aksijalni moment inercije materijalne ta~ke za osu u;

$$J_u^{\{}=\int_0^{l}l^2dm\,,$$

aksijalni moment inercije {tapa za osu u;

$$J_u^{\{}=\int_0^{l^{\{}}l^2dm=\int_0^{l^{\{}}l^2\rho' d\eta=\frac{m}{a}\int_0^{2a}(2a+\xi)^2d\eta=\frac{m}{a}\int_0^{2a}(2a+\frac{\eta}{2})^2d\eta=\frac{38}{3}ma^2\,,$$

gde smo iskoristili vrednosti:

$$l^{\{}=2a,\quad \xi=\eta\sin 30^0\,.$$

Ose ξ i η ozna~ene su na slici.

2.Zadatak: Sistem ima dva stepena slobode kretawa i za generalisane koordinate biramo uglove φ_1 i φ_2 (zao)kretawa materijalnih ta~aka po kru`nom luku.

U polo`aju stati~ke ravnote`e, uravnote`ene su sila u opruzi i sila te`ine, pa se mo`e napisati jedna~ina ravnote`e projekcija sila na tangencijalni pravac:

$$\sum \vec{F}_T = 2mg\sin\alpha - F_c^{st} = 0 \Rightarrow \quad cf_{st} = 2mg\sin\alpha$$

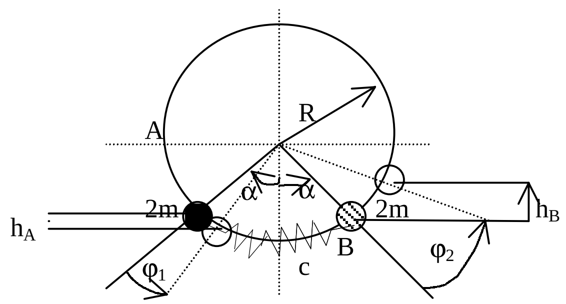
Kineti~ka energija sistema je:

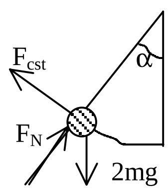
$$2E_k = 2mv_A^2 + 2mv_B^2 = 2mR^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2),$$

odakle sledi da je inercijska matrica:

$$\mathbf{A} = 2mR^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2mR^2\overline{\mathbf{A}}.$$

Promena potencijalne energije sistema je:





$$E_p = E_{pc} + E_{pA} + E_{pB},$$

gde su:

$$E_{pc} = \frac{1}{2}c(\Delta x - f_{st})^2 - \frac{1}{2}cf_{st}^{\ 2} = \frac{1}{2}cR^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 - cR(\varphi_2 - \varphi_1)f_{st}$$

promena potencijalne energije opruge;

$$E_{pA} = -2mgh_A = 2mgR\frac{\varphi_1^2}{2}\cos\alpha - 2mgR\varphi_1\sin\alpha,$$

promena potencijalne energije materijalne ta~ke A mase 2m, koja je negativna usled spu{tawa te ta~ke za visinu

$$h_A = R\cos(\alpha - \varphi_1) - R\cos\alpha \approx -R\frac{\varphi_1^2}{2}\cos\alpha + R\varphi_1\sin\alpha;$$

$$E_{pB} = 2mgh_B = 2mgR\frac{\varphi_2^2}{2}\cos\alpha + 2mgR\varphi_2\sin\alpha,$$

promena potencijalne energije materijalne ta~ke V mase 2m, koja je pozitivna usled podizawa te ta~ke za visinu

$$h_B = -R\cos(\alpha + \varphi_2) + R\cos\alpha \approx R\frac{\varphi_2^2}{2}\cos\alpha + R\varphi_2\sin\alpha;$$

Posle uvo|ewa zadatkom zadatih smena promena potencijalne energije sistema postaje:

$$2E_p = cR^2(\varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1 + \varphi_1^2 + k\varphi_2^2 + k\varphi_1^2) = cR^2\left[(1+k)\varphi_1^2 - 2\varphi_2\varphi_1 + (1+k)\varphi_2^2\right],$$

pa je matrica kvazielasti~nih elemenata:

$$\mathbf{C} = cR^2\begin{pmatrix} 1+k & -1 \\ -1 & 1+k \end{pmatrix} = cR^2\overline{\mathbf{C}}.$$

Lagrange-eove jedna~ine druge vrste za generalisane koordinate φ_1 i φ_2, u matri~nom obliku su:

$$\mathbf{A}\begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{C}\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = 0;$$

Pretpostavimo re{ewe u obliku:

$$\varphi_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha); \qquad \ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 A_1 \cos(\omega t + \alpha)$$
$$\varphi_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha); \qquad \ddot{\varphi}_2 = -\omega^2 A_2 \cos(\omega t + \alpha) \quad ;$$

pomo}u koga sisitem Lagrange-ovih jedna~ina druge vrste prevodimo u sisitem homogenih algebarskih jedna~ina, ~iji je matri~ni oblik po nepoznatim amplitudama A_1 i A_2:

$$\left(-\omega^2 \mathbf{A} + \mathbf{C}\right)\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = 0 \ .$$

Odavde se, iz uslova da je determinanta sistema homogenih algebarskih jedna~ina jednaka nuli, dobija slede}a frekfentna jedna~ina:

$$f(u = \frac{2m\omega^2}{c}) = \left|\overline{\mathbf{C}} - u\overline{\mathbf{A}}\right| = 0 \ ,$$

odakle sledi:

$$f(u) = \begin{vmatrix} 1+k-u & -1 \\ -1 & 1+k-u \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

odnosno

$$f(u) = (1+k-u)^2 - 1 = 0$$

Koreni prethodne frekventne jedna~ine su sopstvene kru`ne frekvencije sistema koje iznose:

$$u_1 = k \Rightarrow \quad \omega_1^2 = \frac{2m}{c}\frac{g}{R}\cos\alpha$$

$$u_2 = 2 + k \Rightarrow \quad \omega_2^2 = 2 + \frac{2m}{c}\frac{g}{R}\cos\alpha$$

Odnosi amplituda oscilovawa za s-tu sopstvenu vrednost su:

$$\frac{A_1^{(s)}}{1} = \frac{A_2^{(s)}}{1+k-u_s} = C_s \ ;$$

odnosno, za konkretno sra~unate sopstvene vrednosti, ti odnosi su:

$$\frac{A_1^{(1)}}{1} = \frac{A_2^{(1)}}{1} = C_1 \ , \qquad\qquad \frac{A_1^{(2)}}{1} = \frac{A_2^{(2)}}{-1} = C_2 \ .$$

Sopstveni amplitudni vektori za glavne koordinate su sada:

$$\{r_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \text{i} \qquad \{r_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix},$$

a modalna matrica za sistem glavnih koordinata je:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Veze izme|u generalisanih φ_1 i φ_2 i glavnih ξ_1 i ξ_2 koordinata sistema su zadate u obliku:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{R}\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \xi_1 + \xi_2 \\ \varphi_2 &= \xi_1 - \xi_2 \end{aligned} \ .$$

Inerciona matrica u sistemu glavnih kordinata ξ_1 i ξ_2 ima oblik:

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{R'AR} = 4mR^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a matrica kvazielasti~nih elemenata u tom sistemu koordinata, ξ_1 i ξ_2, je oblika:

$$\overline{\overline{\mathbf{C}}} = \mathbf{R'CR} = 2cR^2\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2+k \end{pmatrix}.$$

Kineti~ka i potencijalna energija u sistemu glavnih koordinata imaju oblik:

$$2E_k = 4mR^2(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2),$$

$$2E_p = 2cR^2\left[k\xi_1^2 + (2+k)\xi_2^2\right].$$

Za normirawe sopstvenih vektora

$$\{v_s\} = C_s^*\{r_s\},$$

koristimo formulu:

$$(v_s)\mathbf{A}\{v_s\} = 1,$$

pomo}u koje odre|ujemo nepoznate koeficijente normirawa:

$$C_1^{*2}\cdot(1 \quad 1)\cdot 2mR^2\cdot\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1 \Rightarrow \quad C_1^* = \pm\frac{1}{2R\sqrt{m}}$$

$$C_2^{*2}\cdot(1 \quad -1)\cdot 2mR^2\cdot\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 1 \Rightarrow \quad C_2^* = \pm\frac{1}{2R\sqrt{m}}$$

i normiranu modalnu matricu (u sistemu normalnih koordinata η_1 i η_2) mo`emo sada sastaviti od normiranih, normalnih amplitudnih vektora u obliku:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2R\sqrt{m}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Inerciona matrica u sistemu normalnih kordinata η_1 i η_2 ima oblik:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V'AV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I},$$

a matrica kvazielasti~nih elemenata u tom sistemu koordinata je oblika:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{V'CV} = \frac{c}{2m}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \\ & \omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

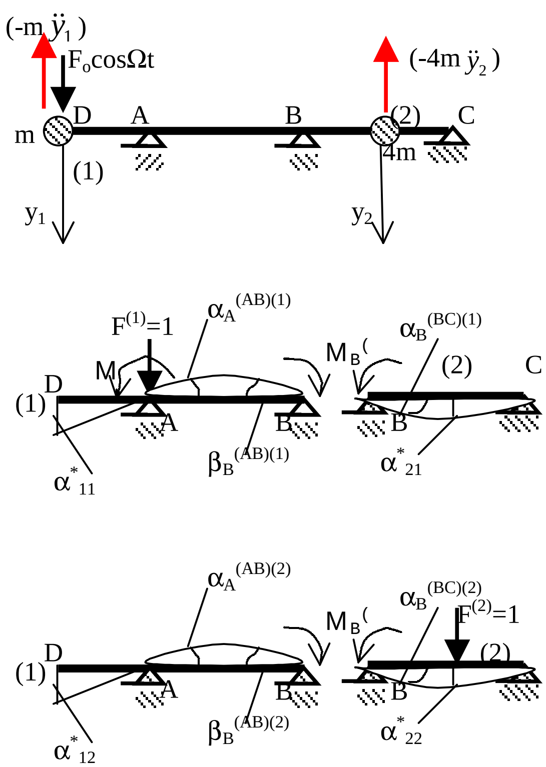
Homogene kvadratne forme kineti`ke i potencijalne energije izra`ene pomo}u normalnih koordinata η_i, $i = 1,2$ su:

$$2E_k = \dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2$$

$$2E_p = \omega_1^2\eta_1^2 + \omega_2^2\eta_2^2 = \frac{c}{2m}\left[k\eta_1^2 + (2+k)\mu_2^2\right].$$

3.Zadatak: Kako je kontinualni nosa~ jedanput stati~ki neodre|en to je potrebno odrediti odgovaraju}e stati~ki nepoznate veli~ine, pa potom odrediti i potrebne uticajne koeficijente pomerawa.

Na slici je prikazan kontinualni nosa~ optere}en jedini~nom silom $F^{(1)}=1$ koja dejstvuje u preseku (1) i dekomponovani nosa~ na gredu sa levim prepustom DAB i prostu gredu BC.



Greda sa prepustom na levom kraju, optere}ena je jedini~nom silom $F^{(1)}=1$ na slobodnom kraju prepusta, tu silu redukujemo na levi oslonac, pa se javqa i spreg momenta M=1/2, dok se na desnom osloncu javqa reaktivni spreg momenta $M^{(1)}_B$, pretpostavqenog smera ozna~enog na slici, a suprotnog smera se javqa i na levom osloncu proste grede BC. Da bi smo odredili stati~ki nepoznatu $M^{(1)}_B$ iskoristi}emo uslov da je nagib $\beta_B^{(AB)(1)}$ tangente na elasti~nu liniju grede DAB u osloncu B jednak nagibu $\alpha_B^{(BC)(1)}$ tangente na elasti~nu liniju grede BC u osloncu B. Koriste}i Tablice iz otpornosti materijala (D.Ra{kovi}) za nagib tangente na elasti~nu liniju u osloncima grede optere}ene spregovima nad osloncima, sastavqamo jedna~inu za odre|ivawe stati~ke nepoznate:

$$\alpha_B^{(BC)(1)} = \beta_B^{(AB)(1)}$$

$$-\frac{M_B^{(1)} l}{3B} = \frac{l}{6B}\left(M + 2M_B^{(1)}\right) \Rightarrow \quad M_B^{(1)} = -\frac{l}{8} \qquad (1)$$

Nagib $\alpha_A^{(AB)(1)}$ tangente na elasti~nu liniju u osloncu A jednak je zbiru nagiba tangente kod proste grede optere}ene spregovima M=1/2 i $M^{(1)}_B$ nad osloncima:

$$\alpha_A^{(AB)(1)} = -\frac{l}{6B}\left(M + 2M_B^{(1)}\right) = -\frac{7l^2}{3\cdot 2^4 B} \qquad (2)$$

Sada lako odre|ujemo uticajne koeficijente:

- α_{11}^{*} - uticajni koeficijent ugiba preseka (1) kontinualnog nosa~a usled dejstva jedini~ne sile u tom preseku, odre|ujemo kao ugib slobodnog kraja konzole DA usled dejstva jedini~ne sile na slobodnom kraju i usled zaokretawa konzole za nagibni ugao $\alpha_A^{(AB)(1)}$ jer je prepust grede elasti~nmo ukle{tena konzola:

$$\alpha_{11}^* = -\frac{(l/2)^2}{3B} - \alpha_A^{(AB)(1)}\frac{l}{2} = \frac{11l^3}{3\cdot 2^5 B} = 176p \qquad (3)$$

- α^*_{21} - uticajni koeficijent ugiba preseka (2) kontinualnog nosa~a usled dejstva jedini~ne sile u preseku (1), odre|ujemo kao ugib preseka (2) na sredini raspona proste grede BC usled dejstva reaktivnog sprega $M^{(1)}_B$ nad osloncem B:

$$\alpha^*_{21} = \alpha^*_{12} = -\delta_{2B}\, M^{(1)}_B = \frac{l^3}{2^7 B} = 12p \qquad (4)$$

gde je δ_{2B} uticajni koeficijent ugiba preseka (2) usled dejstva jedini~nog sprega nad osloncem B, proste grede, koji uzimamo iz Tablica.

Da bi se odredio uticajni koeficijent α^*_{22} potrebno je sad kontinualni nosa~ opteretiti silom $F^{(2)}=1$ u preseku (2) i ponovo odrediti odgovaraju}u stati~ki nepoznatu $M_B^{(2)}$ na analogan na~in kao u u prethodnom slu~aju:

$$\alpha_B^{(BC)(2)} = \beta_B^{(AB)(2)};$$

$$\frac{M^{(2)}_B l}{3B} = -\frac{M^{(2)}_B l}{6B} + \frac{l^2}{16B} \Rightarrow \quad M^{(2)}_B = \frac{3l}{32} \qquad (5)$$

- α^*_{22} - uticajni koeficijent ugiba preseka (2) usled dejstva jedini~ne sile u preseku (2) kontinualnog nosa~a, kao ugib preseka (2) na sredini raspona proste grede BC usled dejstva jedini~ne sile $F^{(2)}=1$ na sredini grede i reaktivnog sprega $M^{(2)}_B$ nad osloncem B:

$$\alpha^*_{22} = \alpha_{22} - \delta_{2B}\, M^{(2)}_B = \frac{l^3}{48B} + \frac{3l^3}{16\cdot 32B} = 23p \qquad (6)$$

gde je $\alpha_{22} = \dfrac{\ell^3}{48B}$ uticajni koeficijent ugiba preseka (2) na sredini proste grede usled dejstva u istom preseku jedini~ne sile, a $\delta_{2B} = \dfrac{\ell^3}{16B}$ uticajni koeficijent ugiba preseka (2) na sredini proste grede usled dejstva jedini~nog spega nad oslonce proste grede.

Koristili smo i uvedenu smenu $p = \dfrac{l^3}{3\cdot 2^9 B}$.

Na slici su prikazane generalisane koordinate sistema - ugib preseka kontinualnog nosa~a y_i, $i=1,2$ kao i fiktivne sile inercije $(-m\ddot{y}_1)$ i $(-4m\ddot{y}_2)$, i aktivna, prinudna sila $F_0\cos\Omega t$. Sistem diferencijalnih jedna~ina oscilovawa materijalnih ta~aka na lakom elasti~nom nosa~u dobijamo izra~unavawem ugiba preseka (1) i (2) usled dejstva prinudne i fiktivnih sila inercije, koriste}i odre|ene uticajne koeficijente odgovaraju}ih preseka u kojima tra`imo pomerawa i u kojima sile dejstvuju:

$$y_1 = \alpha^*_{11}(-m\ddot{y}_1) + \alpha^*_{12}(-4m\ddot{y}_2) + \alpha^*_{11}F_0\cos\Omega t$$
$$y_2 = \alpha^*_{21}(-m\ddot{y}_1) + \alpha^*_{22}(-4m\ddot{y}_2) + \alpha^*_{21}F_0\cos\Omega t \qquad (7)$$

odnosno za izra~unate vrednosti uticajnih koeficijenata stati~ki neodre|enog nosa~a:

$$y_1 + 176pm\ddot{y}_1 + 48pm\ddot{y}_2 = 176pF_0\cos\Omega t$$
$$y_2 + 12pm\ddot{y}_1 + 92pm\ddot{y}_2 = 12pF_0\cos\Omega t \qquad (8)$$

Ako iskoristimo zadatkom zadate smene $h = 4pF_0$ i $v = 4pm\Omega^2$ i pretpostavimo re{ewa u obliku:

$$y_1 = C_1\cos\Omega t; \quad \ddot{y}_1 = -\Omega^2 C_1\cos\Omega t$$
$$y_2 = C_2\cos\Omega t; \quad \ddot{y}_2 = -\Omega^2 C_2\cos\Omega t \qquad (9)$$

postavqeni sistem diferencijalnih jedna~ina kretawa se svodi na sistem nehomogenih algebarskih jedna~ina po nepoznatim amplitudama C_1 i C_2:

$$\begin{aligned}(1-44v)C_1 - 12vC_2 &= 44h \\ -3vC_1 + (1-23v)C_2 &= 3h\end{aligned} \tag{10}$$

Determinanta ovog sistema nehomogenih algebarskih jedna~ina je:

$$f(v = 4pm\Omega^2) = \Delta(v) = \begin{vmatrix} 1-44v & -12v \\ -3v & 1-23v \end{vmatrix} = 1 - 67v + 976v^2 \neq 0\,. \tag{11}$$

i treba da bude razli~ita od nule da bi sistem ima netrivijalna i nenulta re{ewa. Uslov da determinanta sistema treba da je razli~ita od nule zna~i i da je to uslov da ne bi do{lo do rezonancije $\Delta(v) \neq 0$ sistem pod desjtvom aktivne prinudene sile sa frekvencijom $\Omega^2 = \dfrac{v}{4pm}$.

Iz tog uslova, sledi da su dve rezonantne vrednosti kru`ne frekvencije prinudne sile:

$$\Omega^2_{rez1/2} = \frac{1}{4pm}\frac{67 \mp \sqrt{565}}{1952} \tag{12}$$

Amplitude prinudnih oscilacija C_1 i C_2 odre|ujemo kori{}ewem Kramer-ovog pravila, re{avaju}i prethodni sistem nehomogenih algebarskih jedna~ina (10):

$$C_1 = \frac{\Delta_{C1}}{\Delta(v)} = \frac{h}{\Delta(v)}\begin{vmatrix} 44 & 12v \\ 3 & 1-23v \end{vmatrix} = \frac{h}{\Delta(v)}(44 - 976v) \tag{13}$$

$$C_2 = \frac{\Delta_{C2}}{\Delta(v)} = \frac{h}{\Delta(v)}\begin{vmatrix} 1-44v & 44 \\ -3v & 3 \end{vmatrix} = \frac{3h}{\Delta(v)} \tag{14}$$

Odakle zakqu~ujemo da amplituda C_1 mo`e biti jednaka nuli za:

$$C_1 = 0 \quad \text{za} \quad v_a = \frac{11}{244} \Rightarrow \Omega_a^2 = \frac{11}{976pm}$$

Tada sistem prinudno osciluje ugaonom frekvencom Ω_a i tada je on za materijalnu ta~ku mase m dinami~ki apsorber, jer ona miruje iako na wu dejstvuje aktivna, prinudna sila.

4.Zadatak: Parcijalna diferencijalna jedna~ina oscilovawa, homogene prizmati~ne grede je:

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} + c^2\frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial t^4} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{B}{\rho A}} \tag{1}$$

gde je $y(z,t)$ - transverzalno pomerawe ta~aka elasti~ne linije grede.

Re{ewe pretpostavqamo u obliku proizvoda dveju funkcija $Z(z)$ i $T(t)$ slede}i ideju Bernouli-jeve metode partikularnih integrala.

$$y(z,t) = Z(z)T(t) \tag{2}$$

Uno{ewem ovako pretpostavqenog re{ewa u parcijalnu diferencijalnu jedna~inu (1) ona se svodi na dve obi~ne diferencijalne jedna~ine:

$$T^{''} + \omega^2 T = 0 \qquad (3)$$

$$Z^{IV} - k^4 Z = 0 \qquad (4)$$

Iz diferencijalne jedna~ine (4) odre|ujemo sopstvenu normalnu funkciju Z(z) u obliku:

$$Z(kz) = A\mathsf{S}(kz) + B\mathsf{T}(kz) + C\mathsf{U}(kz) + D\mathsf{V}(kz) \qquad (5)$$

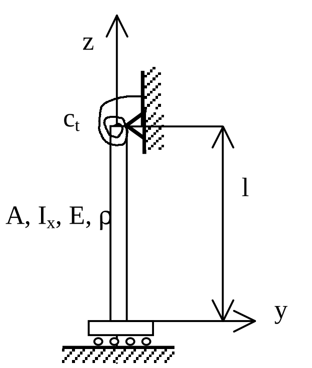
i wene izvode:

$$Z^{'}(kz) = k\left[A\mathsf{V}(kz) + B\mathsf{S}(kz) + C\mathsf{T}(kz) + D\mathsf{U}(kz)\right]$$

$$Z^{''}(kz) = k^2\left[A\mathsf{U}(kz) + B\mathsf{V}(kz) + C\mathsf{S}(kz) + D\mathsf{T}(kz)\right]$$

$$Z^{'''}(kz) = k^3\left[A\mathsf{T}(kz) + B\mathsf{U}(kz) + C\mathsf{V}(kz) + D\mathsf{S}(kz)\right]$$

U kojima su **S**(kz), **T**(kz), **U**(kz), **V**(kz) Hohenemser-Cauchy-Krilov-qeve funkcije. Ta sopstvena funkcija (5) treba da zadovoqava grani~ne uslove. Na dowem kraju greda je ukle{tena u kliza~e i u tom preseku su nagib i transverzalna sila jednaki nuli. Na gorwem kraju greda je oslowena u nepokretni oslonac i za postoqe je vezana spiralnom oprugom krutosti c_t, pa je u tom preseku ugib jednak nuli i moment savijawa grede jednak momentu sprega restitucije koji se javqa u napregnutoj deformisanoj spiralnoj opruzi.



Grani~ni uslovi u dowem osloncu, presek grede za $z=0$ su:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0 \Rightarrow \quad Z^{'}(0) = 0 \qquad (a)$$

$$-\mathsf{B}\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} = 0 \Rightarrow \quad Z^{'''}(0) = 0 \qquad (b)$$

Grani~ni uslovi u gorwem osloncu, presek grede za $z=l$:

$$y(\ell, t) = 0, \quad \Rightarrow \quad Z(l)=0 \qquad (c)$$

$$-\mathsf{B}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - c_t\frac{\partial y}{\partial z} = 0 \Rightarrow \quad -\mathsf{B}Z^{''}(l) - c_t Z^{'}(l) = 0 \qquad (d)$$

Imaju}i u vidu izraz za sopstvenu funkciju (5) i wene izvode ovi uslovi se svode na:

(a) $\quad 0 = k\left[A\mathsf{V}(0) + B\mathsf{S}(0) + C\mathsf{T}(0) + D\mathsf{U}(0)\right] \Rightarrow \quad B = 0$

(b) $\quad 0 = k^3\left[A\mathsf{T}(0) + B\mathsf{U}(0) + C\mathsf{V}(0) + D\mathsf{S}(0)\right] \Rightarrow \quad D = 0$

(c) $\quad 0 = A\mathsf{S}(kl) + B\mathsf{T}(kl) + C\mathsf{U}(kl) + D\mathsf{V}(kl)$

(d) $\quad 0 = -\mathsf{B}k^2\left[A\mathsf{U}(kl) + B\mathsf{V}(kl) + C\mathsf{S}(kl) + D\mathsf{T}(kl)\right] - c_t k\left[A\mathsf{V}(kl) + B\mathsf{S}(kl) + C\mathsf{T}(kl) + D\mathsf{U}(kl)\right]$

Odnosno iz c) i d) sledi:

$$A\mathsf{S}(\xi) + C\mathsf{U}(\xi) = 0$$

$$A\left[-\mathsf{B}k\mathsf{U}(\xi) - c_t\mathsf{V}(\xi)\right] + C\left[\left[-\mathsf{B}k\mathsf{S}(\xi) - c_t\mathsf{T}(\xi)\right]\right] = 0,$$

gde je B= EI_x savojna krutost.

Posledwi sistem jedna~ina je sistem homogenih algebarskih jedna~ina po nepoznatim koeficijentima A i C sopstvene funkcije $Z(z)$ prema (5), i sa transcedentnim koeficijentima. Taj sistem ima re{ewa razli~ita od nultih i trivijalnih, ako je determinanta sistema jednaka nuli. Iz tog uslova sastavqamo frekventnu jedna~inu u obliku:

$$\begin{vmatrix} \mathsf{S}(\xi) & \mathsf{U}(\xi) \\ \xi\mathsf{U}(\xi) + \dfrac{c_t l}{\mathsf{B}}\mathsf{V}(\xi) & \xi\mathsf{S}(\xi) + \dfrac{c_t l}{\mathsf{B}}\mathsf{T}(\xi) \end{vmatrix} = 0;$$

Ako uvedemo oznaku $\mu = \dfrac{c_t l}{B}$ i mno`ewem i kori{}ewem tablica Hohenemser-Cauchy-Krilov-qevih funkcija iz uxbenika teorija oscilacija od D. Ra{kovi}a (str.355) dobija se:

$$S(\xi)\left[-\xi S(\xi) - \mu T(\xi)\right] = U(\xi)\left[\xi U(\xi) + \mu V(\xi)\right] \Rightarrow$$

$$\mu\left[S(\xi)T(\xi) - V(\xi)U(\xi)\right] = -\xi\left[S^2(\xi) - U^2(\xi)\right] \Rightarrow$$

$$-\frac{\mu}{2}\left[ch\xi \sin\xi - sh\xi \cos\xi\right] = \xi\left[ch\xi \cos\xi\right] \Rightarrow$$

odnosno:

$$\underline{\mu(tg\xi + Th\xi) = -2\xi}$$

{to je i frekventna jedna~ina, koja je zadatkom tra`ena.