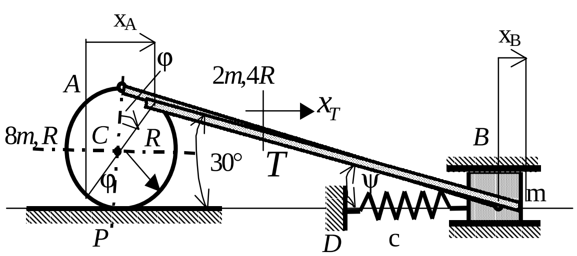
Re{ewa ispitnih zadataka sa pismenog dela ispita iz oktobarskog ispitnog roka iz predmeta

ELASTODINAMIKA

(od 17 septembra 2001 godine)

Zadatak 1.



Slika br. 1

Prikazani sistem ima jedan stepen slobode kretawa i za generalisanu koordinatu izaberimo $x_A = x$ horizontalno pomerawe ta~ke A:

$$x_A = R\varphi + R\sin\varphi \approx 2R\varphi = x\,. \qquad (1)$$

Uveli smo pretpostavku da se radi o malim oscilacijama oko stabilnog ravnote`nog polo`aja koji je prikzan na slici br. 1.

Pomerawe kliza~a B je:

$$x_B = x_A + 4R\cos\psi - 4R\cos 30^\circ\,,$$

i sa slike, na osnovu geometrijskih osnosa se mo`e zakqu~iti da je:

$$4R\sin\psi = R + R\cos\varphi \Rightarrow \quad \sin\psi = \frac{1+\cos\varphi}{4}\,,$$

sada je:

$$x_B = x_A + 4R\sqrt{1-\left(\frac{1+\cos\varphi}{4}\right)^2} - R\sqrt{3}\,,$$

za male uglove φ je $\cos\varphi \approx 1$, pa linearizacijom ovog izraza sledi da je: $x_B \approx x_A$

To zna~i da za mala odstupawa od prikazanog ravnote`nog polo`aja, {tap AB vr{i pribli`no translatorno kretawe, i ako uvedemo pretpostavku o malim oscilacijama oko ravnote`nog polo`aja korektno je izvesti linearizacije i uzeti da je $\cos\varphi \approx 1$ i $\sin\varphi \approx \varphi$.

Spu{tawe centra mase {tapa T je:

$$h_T = R - 2R\sin\psi = R - 2R\frac{1+\cos\varphi}{4} = R - R\frac{1+\cos\varphi}{2} = R\frac{1-\cos\varphi}{2} = R\sin^2\frac{\varphi}{2} \approx R\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = R\frac{\varphi^2}{4} \approx R\frac{\left(\frac{x}{2R}\right)^2}{4} = \frac{x^2}{16R}$$

{to je tako|e posledica uvedene pretpostavke o malim oscilacijama oko ravnote`nog polo`aja i sprovedene linearizacije i potvrda da se {tap u tom slu~aju kre}e translatorno.

Kineti~ka energija sistema se sastoji od kineti~ke energije translacije {tapa, kineti~ke energije translacije kliza~a i kineti~ke energije rotacije diska:

$$E_k = \frac{1}{2}J_P\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}2m\dot{x}_T^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_B^2 = 3m\dot{x}^2\,, \qquad \text{ili}$$

$$E_k = \frac{1}{2}J_P\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}2m\dot{x}_T^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_B^2 = 12m\dot{\varphi}^2$$

jer su: aksijalni moment inercije mase diska J_P za trenutnu osu rotacije koja prolazi, upravno na disk, kroz ta~ku dodira sa podlogom P po kojoj se kotrqa i veza izme|u generalisane koordinate x i ugla zaokretawa diska φ, koja sledi iz linearizacije (1), dati izrazima:

$$J_P = 12mR^2, \quad \dot{\varphi} \approx \frac{\dot{x}}{2R}$$

Promena potencijalne energije sistema je:

$$E_P = \frac{1}{2}cx_B^2 - 2mgh_T \approx \frac{1}{2}cx^2 - 2mg\frac{x^2}{16R} = \frac{1}{2}\left(c - \frac{mg}{4R}\right)x^2 \qquad \text{ili} \qquad E_P = 2\left(c - \frac{mg}{4R}\right)R^2\dot{\varphi}^2 .$$

Lagrang-eova jedna~ina druge vrste za generalisanu koordinatu h je:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \Rightarrow 6m\ddot{x} + \left(c - \frac{mg}{4R}\right)x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{c}{6m} - \frac{g}{24R}\right)x = 0 \qquad \text{i po\{to je:}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow$$

to sledi da kvadrat sopstvene kru`ne frekvencije malih oscilacija

$$\omega^2 = \frac{c}{6m} - \frac{g}{24R} .$$

Do iste vrednosti se dolazi i pomo}u koordinate φ ugla zaokretawa diska ako se on zabere za generalisanu koordinatu:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow 24mR^2\ddot{\varphi} + \left(c - \frac{mg}{4R}\right)4R^2\varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \left(\frac{c}{6m} - \frac{g}{24R}\right)\varphi = 0 \qquad \text{i po\{to je:}$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \Rightarrow$$

to sledi da je kvadrat sopstvene kru`ne frekvencije malih oscilacija

$$\omega^2 = \frac{c}{6m} - \frac{g}{24R} ,$$

{to je isti izraz koji smo dobili i u prethodnom postupku. Ovo pokazuje da je sopstvena kru`na frekvencija svojstvo sistema i da ne zavisi od matemati~kog puta wenog izra~unavawa, odnosno od izbora generalisane koordinate.

U po~etku smo, bez dokaza, uveli pretpostavku da je prikazana konfiguracija elemenata sistema prikazana na slici br. 1 stabilna, i da se zahvaquju}i tome mogu odvijati male oscilacije sistema oko tog prikzanog stabilnog ravnote`nog polo`aja, i na osnovu te pretpostavke o malim koordinatama izveli smo nekoliko linearizacija i aproksimacija da bi smo sastavili izraze za kineti~ku i potencijalnu energiju, i pomo}u iatih odredili kvadrat sopstvene kru`ne frekvencije, koji mora da bude pozitivan ako je uvedena pretpostavka odr`iva. Na osnovu toga odre|ujemo vezu parametara sistema u aproksimativnoj postavci da pretpostavka o stabilnosti pude zadovoqena. Na osnovu toga pi{emo da je potreban uslov stabilnosti:

$$\omega^2 = \frac{c}{6m} - \frac{g}{24R} > 0$$

i dobijamo vezu parametara sistema - uslov stabilnosti:

$$4cR > mg$$

da uvesena pretpostavka na kojoj smo zasnovali re{avawe zadatka bude zadovoqena i opravdana.

Do iste veze parametara sistema, kao uslova stabilnosti prikazanog ravnote`nog polo`aja sa slike br. 1 mo`emo do}i na osnovu zahteva da aproksimativna vrednsnost izraza za potencijalnu energiju

$$E_P = \frac{1}{2}\left(c - \frac{mg}{4R}\right)x^2 \quad \text{ili} \quad E_P = 2\left(c - \frac{mg}{4R}\right)R^2\dot{\varphi}^2 .$$

bude homogena kvadratna forma i pozitivno definitna u okolini polo`aja ravnote`e oko koga se javqaju male oscilacije. to zna~i da je potrebno da koeficijent uz kvadratni ~lan u prethodnim izrazima bude pozitivan, odnosno da je zadovoqen uslov:

$$c - \frac{mg}{4R} > 0$$

tako da dobijamo vezu parametara sistema - uslov stabilnosti:

$$4cR > mg$$

koji je istovetan kao i sa prethodno dobijenim.

Do istog rezultata se mo`e do}i i iz uslova izraz za potencijalnu energiju u prikazanom polo`aju ravnote`e za $x = 0$ odnosno za $\varphi = 0$ ima ekstremnu vrednost - minimum, odnosno da wen prvi izvod po generalisanoj koordinati bude jednak nuli, a drugi izvod bude pozitivan. To isto va`i za za pribli`nu vrednost izraza za potencijalnu energiju, ali samo u okolini tog posmatranog polo`aja ravnote`e i na osnovu toga pi{emo:

$$\frac{dE_p}{dx} = \left(c - \frac{mg}{4R}\right)x = 0 \qquad \frac{d^2E_p}{dx^2} = \left(c - \frac{mg}{4R}\right) > 0$$

te sledi prethodno dobijena veza parametara sistema.

Ako na sredi{te diska C stalno dejstvuje horizontalna sila $F_0\cos\Omega t$ uop{tena Lagrange-ova jedna~ina je sada:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = Q_x \Rightarrow 6m\ddot{x} + \left(c - \frac{mg}{4R}\right)x = \frac{F_0}{2}\cos\Omega t \quad \text{uvedimo smenu} \quad h = \frac{F_0}{12m}$$

po{to je sada: $\ddot{x} + \omega^2 x = h\cos\Omega t$ (**)

Generalisanu silu $Q_x = \frac{F_0}{2}\cos\Omega t$ za koordinatu x dore|ujemo pomo}u rada sile na putu $\delta x_C \approx \frac{\delta x}{2}$:

$$\delta A = F_0\cos\Omega t\,\delta x_C = F_0\cos\Omega t\frac{\delta x}{2}$$ pa sledi da je $$Q_x = \frac{F_0}{2}\cos\Omega t$$

Re{ewe parcjalne diferencjalne jedna~ine sa konstantnim koeficijentima ima oblik:

$x = x_h + x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t + C\cos\Omega t,$ jer je $x_p = C\cos\Omega t$,

onda je:

$$\ddot{x}_p = -\Omega^2 C\cos\Omega t ,$$

ako sada vrednosti za h_r i $\ddot{x}_p$ unesemo u jedna~inu (**) dobija se vrednost konstantne amplitude S.

$$C = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} ,$$

pa je:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}\cos\Omega t \quad ,$$

{to je zakon prinudnih oscilacija kliza~a. Rezonantno stawe nastupa kada se vrednost frekvencije prinudne sile **izjedna~i** sa vredno{}u sopstvene kru`ne frekvencije sistema:

$$\Omega_{rez}^2 = \omega^2 = \frac{c}{6m} - \frac{g}{24R}$$

Zakon prinudnog kretawa kliza~a:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{F_o\cos\Omega t}{2\left(c - \dfrac{mg}{4R} - 6m\Omega^2\right)}$$

Ako sada na centar masa C diska u horizontalnom pravcu dejstvuje prinudna sila $F_0\cos\left(\Omega t + \dfrac{\pi}{n}\right)$, gde je $n \in N$, i koja se razlikuje od one u prethodnom slu~aju ka{wewem u fazi za $\dfrac{\pi}{n}$, analogno prethodnom postupku, odre|ujemo zakon prinudnih oscilacija u obliku:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{F_o\cos(\Omega t + \dfrac{\pi}{n})}{12m\left(\omega^2 - \Omega^2\right)}$$

Za zadate po~etne uslove da je sistem bio u miru kada je po~ela da dejstvuje prinudna sila sledi da je:

$$x(0) = A + \frac{F_o\cos\dfrac{\pi}{n}}{12m\left(\omega^2 - \Omega^2\right)} = 0$$

$$\dot{x}(0) = B\omega - \frac{\Omega F_o\sin\dfrac{\pi}{n}}{12m\left(\omega^2 - \Omega^2\right)} = 0$$

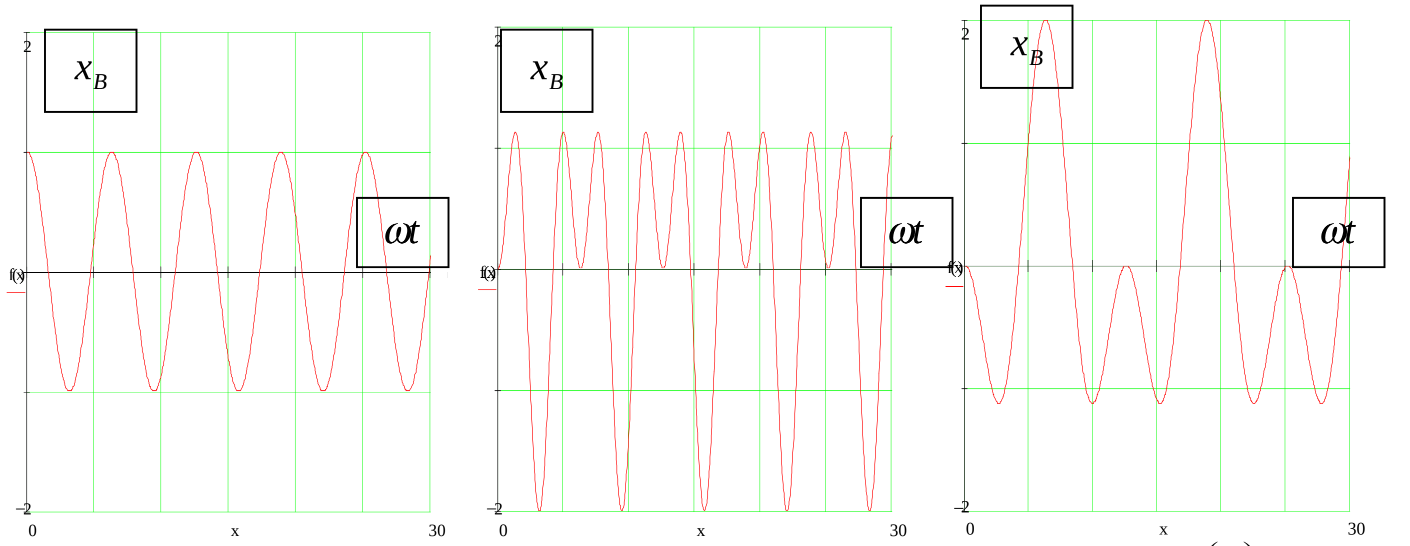
Iz prethodno integracione konstante **A** i **B** odre|ujemo u obliku:

$$A = -\frac{F_o\cos\dfrac{\pi}{n}}{12m\left(\omega^2 - \Omega^2\right)} \quad \text{i} \quad B = \frac{\Omega F_o\sin\dfrac{\pi}{n}}{12m\omega\left(\omega^2 - \Omega^2\right)}$$

Sada je zakon prinudnog kretawa kliza~a pod dejstvom sile $F = F_0\cos\left(\Omega t + \dfrac{\pi}{n}\right)$ koja dejstvuje u horizontalnom pravcu na centar masa C diska:

$$x(t) = \frac{F_o}{12m\left(\omega^2 - \Omega^2\right)}\left[-\cos(\omega t)\cos\frac{\pi}{n} + \frac{\Omega}{\omega}\sin(\omega t)\sin\frac{\pi}{n} + \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{n}\right)\right] \qquad (1)$$

Na slici br. 1 a* prikazana su dva slu~aja grafika promene zakona prinudnih oscilacija kliza~a za nulte po~etne uslove a za slu~ajeve kada je frekvencija prinudne sile dva puta ve}a odnosno dva puta mawa od frekvencije sopstvenih oscilacija sistema, kao zakon sopstvenih oscilacija kliza~a radi pore|ewa.



$f(x) := \cos(x)$ $\qquad$ $f(x) := \cos(x) - \cos(2\cdot x)$ $\qquad$ $f(x) := \cos(x) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$x_B = \cos\omega t$ $\qquad$ $x_B = \cos\omega t - \cos\Omega t,\ \Omega = 2\omega$ $\qquad$ $x_B = \cos\omega t - \cos\Omega t,\ \Omega = \dfrac{\omega}{2}$

Slika br. 1 a* Grafik *sopstvenih* oscilacija kliza~a oko ravnote`nog polo`aja i grafici *prinudnih oscilacija kliza~a za dva slu~aja frekvencije prinudne sile*: kada je dva puta ve}a i kada je dva puta mawa od frekvencije sopstvenih oscilacija.

Sistem se pribli`ava rezonantnom stawu kada frekvencija prinudnih oscilacija $\Omega$ uzima diskretne vrednosti i te`i vrednosti sopstvene kru`ne frekvencije sistema $\omega$, odnosno kada je $\Omega \to \omega$, a nastupa kada je frekvencija prinudnih oscilacija $\Omega$ jednaka frekvenciji sopstvenih oscilacija sistema $\omega$. Da bi smo odredili zakon rezonantnih oscilacija posmatranog sistema za zadate po~etne uslove potra`imo grani~nu vrednost izraza re{ewa (1) kada $\Omega \to \omega$. Zato je potrebno da primenimo Lopital-ovo pravilo za odre|ivawe grani~ne vrednosti izraza za koji direktna smena promenqive u te`wi wenom grani~nom vredo{}u dovodi do neodre|enog izraza $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{\Omega\to\omega} x(t) = \lim_{\Omega\to\omega} \frac{F_o}{12m} \frac{\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\sin\frac{\pi}{n} - t\sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{n}\right)}{-2\Omega} = -\frac{F_o}{24m\omega^2}\left[\sin(\omega t)\sin\frac{\pi}{n} - \omega t\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{n}\right)\right]$$

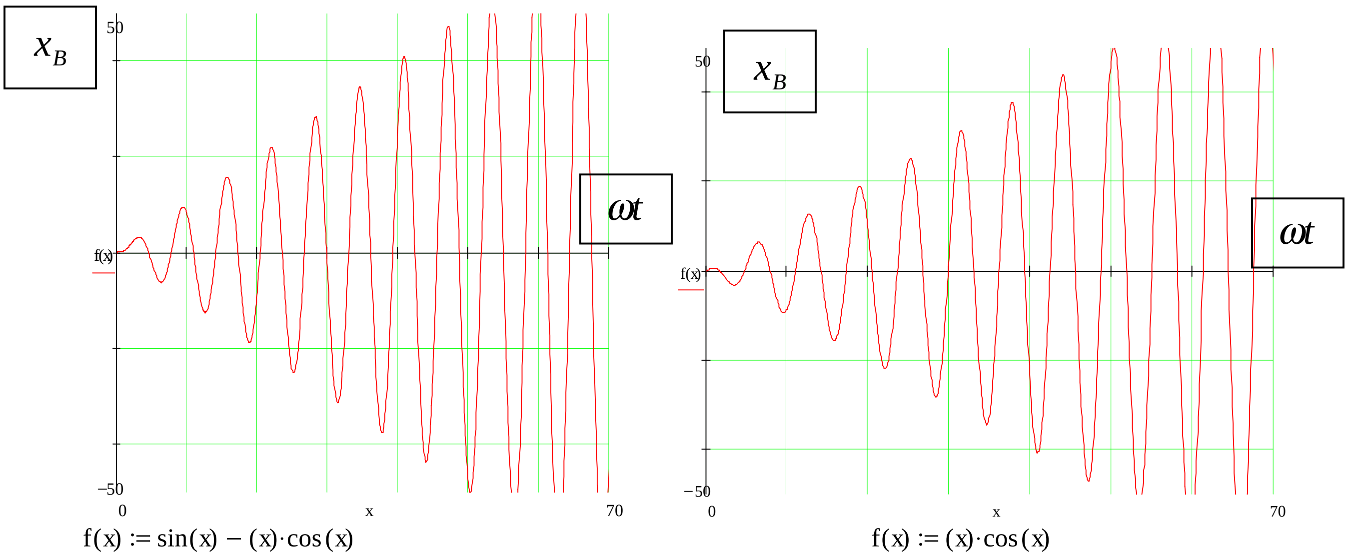
$$x(t) = -\frac{F_o}{24m\omega^2}\left[\sin(\omega t)\sin\frac{\pi}{n} - \omega t\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{n}\right)\right]$$

Za $n=1$ sledi da je zakon prinudnog rezonantnog oscilovawa kliza~a B za nulte po~etne uslove sistema i pod dejstvom horizontalne prinudne sile $F = F_0\cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{n}\right)$ koja dejstvuje na centar masa diska u obliku:

$$x(t)=\frac{F_o}{24m\omega^2}\left[\omega t\sin(\omega t+\pi)\right]=\frac{F_o}{24m\omega^2}\,\omega t\cos\omega t$$

Za $n=2$ zakon prinudnog rezonantnog oscilovawa kliza~a B za nulte po~etne uslove sistema i pod dejstvom horizontalne prinudne sile $F=F_0\cos\left(\Omega t+\dfrac{\pi}{n}\right)$ koja dejstvuje na centar masa diska u obliku:

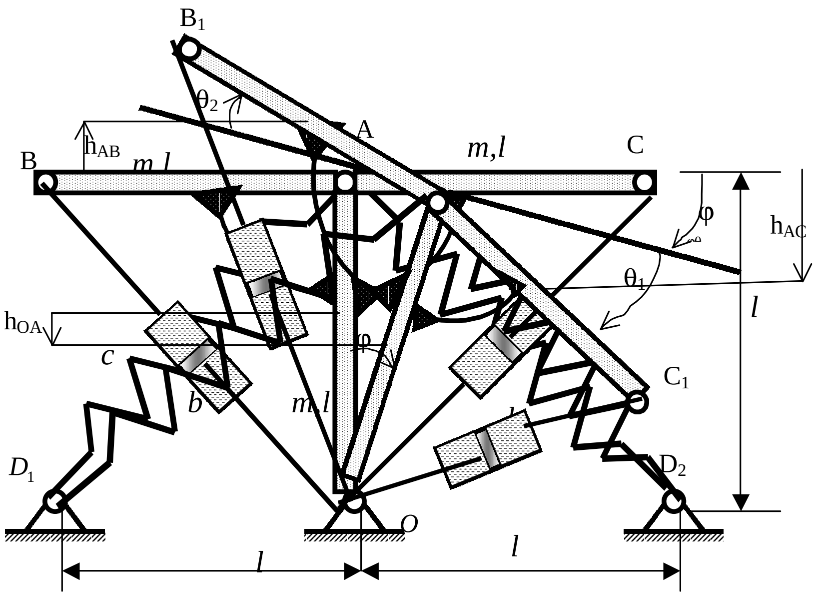
$$x(t)=-\frac{F_o}{24m\omega^2}\left[\sin(\omega t)-\omega t\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\frac{F_o}{24m\omega^2}\left[\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\right]$$



Slika br. 1. b* Oscilovawe kliza~a u rezonantnom stawu
Dva slu~aja za razli~ite faze periodi~ke prinudne sile

Na slici br. 1. **b*** prikazan je oblik grafika zakona prinudnog rezonantnog oscilovawa kliza~a koji je nacrtan posredstvom matemati~kog programskog alata - **programa MathCad**. Na apscisnoj osi se o~itava proticawe vremena, odnosno ωt , dok se sa ordinatnih osa o~itava elongacije kliza~a za dva slu~aja zadate faze prinudne sile. Vidimo da elongacije sistema u rezonantnim uslovima nisu odmah beskona~ne, nego one se uve}avaju u toku vremena i te`e beskona~nosti. O~igledno je da {to je sistem du`e podvrgnut rezonantnom stawu, to se wegove elongacije uve}avaju. Tako|e se mo`e zakqu~iti da aproksimativni model dinamike izra`en napisanim diferencijalnim jedna~imnama ima smisla samo za dovoqno male i ne prevelike, i istovremeno dovoqno male vrednosti rezonantnih amplituda. Matemati~ko re{ewe ima smisla za primenu na posmatrani model materijalnog sistema samo sa aspekta obija{wewa fenomena rezonancije i shvatawa fenomenologije procesa uve}awa elongacija (udaqavawa sistema od ravnote`nog polo`aja prinudno i za dovoqno mali interval vremena. Za dovoqno veliki interval vremena ovi zakoni su samo “matemati~ki opis”, koji prestaje da zadovoqava pretpostavke na kojima je bazirano matemati~ko opisivawe prinudne dinamike oscilovawa sistema.

Zadatak 2.



Slika 2.

a* Sistem ima tri stepena slobode kretawa i za generalisane kordinate biramo uglove zaokretawa: ugao φ_1 zaokretawa {tapa OA oko ta~ke O , i zapokretawa celog sistema zajedno sa wim, kao da je kruta veza {tapova, opruga i prigu{nica, ugao θ_1 relativnog zaokretawa {tapa AS oko ta~ke A u odnosu na {tap OA i ugao relativnog zaokretawa θ_2 {tapa AV oko ta~ke A u odnosu na {tap OA.

Koordinate centra masa {tapa AS su:

$$x_{AC} = l\sin\varphi + \frac{l}{2}\cos(\varphi+\theta_1)$$

$$y_{AC} = l\cos\varphi - \frac{l}{2}\sin(\varphi+\theta_1)\,,$$

i odre|ivawem wihovih izvoda po vremenu sastavqamo kvadrat brzine centra masa {tapa AS u slede}em obliku:

$$v_{AC}^2 = \dot{x}_{AC}^2 + \dot{y}_{AC}^2 = \dot{\varphi}^2 l^2 + \frac{l^2}{4}(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_1)^2 + \dot{\varphi} l^2(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_1)\sin\theta_1$$

Zanemaruju}i posledwi ~lan ovog izraza kao malu veli~inu tre}eg, vi{eg reda od ostalih ~alanova, pribli`nu vrednost kvadrata brzine centra masa {tapa AS dobijamo u slede}em obliku:

$$v_{AC}^2 \approx \frac{l^2}{4}(5\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1^2)$$

Dvostruka vrednost kineti~ke energije {tapa OA je:

$$2E_{kOA} = J_{OA}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}^2\,.$$

Dvostruka vrednost kineti~ke energije {tapa AS je:

$$2E_{kAC} = J_{AC}(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_1)^2 + mv_{AC}^2 = \frac{1}{12}ml^2(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_1)^2 + \frac{ml^2}{4}(5\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1^2) = \frac{ml^2}{3}(4\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1^2)\,.$$

Koordinate centra masa (te`i{ta) {tapa AV su:

$$x_{AB} = -l\sin\varphi + \frac{l}{2}\cos(\varphi-\theta_2)$$

$$y_{AB} = l\cos\varphi + \frac{l}{2}\sin(\varphi-\theta_2)\,,$$

Kvadrat brzine centra masa (te`i{ta) {tapa AV je:

$$v_{AB}^2 = \dot{x}_{AB}^2 + \dot{y}_{AB}^2 = \dot{\varphi}^2 l^2 + \frac{l^2}{4}(\dot{\varphi}-\dot{\theta}_2)^2 + \dot{\varphi} l^2(\dot{\varphi}-\dot{\theta}_2)\sin\theta_2$$

Zanemaruju}i posledwi ~lan ovog izraza kao malu veli~inu tre}eg, vi{eg reda od ostalih ~alanova, pribli`nu vrednost kvadrata brzine centra masa {tapa AV dobijamo u slede}em obliku:

$$v_{AB}^2 \approx \frac{l^2}{4}(5\dot{\varphi}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2).$$

Dvostruka vrednost kineti~ke energije {tapa AV je:

$$2E_{kAB} = J_{AB}(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2)^2 + mv_{AB}^2 = \frac{1}{12}ml^2(\dot{\varphi} - \dot{\theta}_2)^2 + \frac{ml^2}{4}(5\dot{\varphi}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) = \frac{ml^2}{3}(4\dot{\varphi}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2).$$

Dvostruka vrednost kineti~ke energije sistema je:

$$2E_k = 2E_{kOA} + 2E_{kAB} + 2E_{kAC} = \frac{ml^2}{3}(9\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \Rightarrow .$$

i sledi da je inerciona matrica sistema:

$$\mathbf{A} = \frac{ml^2}{3}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{ml^2}{3}\overline{\mathbf{A}}.$$

Funkcija rasipawa u sistemu se defini{e pomo}u funkcija rasipawa dve prigu{nice koje su prisutne u posmatranom materijalnom sistemu. Relativna brzina kretawa klipa u odnosu na cilindar prve prigu{nice je v_c, dok je kod druge v_B:

Koordinate ta~ke S {tapa AS su:

$$x_C = l\sin\varphi + l\cos(\varphi + \theta_1)$$
$$y_C = l\cos\varphi - l\sin(\varphi + \theta_1),$$

po{to je relativna brzina kretawa klipa u odnosu na cilindar prve prigu{nice je v_c:

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = \dot{\varphi}^2 l^2 + l^2(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1)^2 + \dot{\varphi}l^2(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1)\sin\theta_1$$

to zanemaruju}i posledwi ~lan ovog izraza kao malu veli~inu tre}eg reda sledi da je wena pribli`na vrednost:

$$v_C^2 \approx l^2(2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1^2);$$

Koordinate ta~ke V {tapa AV su:

$$x_B = -l\sin\varphi + l\cos(\varphi - \theta_2)$$
$$y_B = l\cos\varphi + l\sin(\varphi - \theta_2),$$

po{to je relativna brzina kretawa klipa u odnosu na cilindar druge prigu{nice je v_B:

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = \dot{\varphi}^2 l^2 + l^2(\dot{\varphi} - \dot{\theta}_2)^2 + \dot{\varphi}l^2(\dot{\varphi} - \dot{\theta}_2)\sin\theta_2$$

zanemaruju}i posledwi ~lan ovog izraza kao malu veli~inu tre}eg reda sledi sledi da je wena pribli`na vrednost:

$$v_B^2 \approx l^2(2\dot{\varphi}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2).$$

Funkcija rasipawa sistema je:

$$\Phi = \frac{1}{2}bv_C{}^2 + \frac{1}{2}bv_B{}^2 = \frac{1}{2}bl^2(4\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)$$

Sada pomo}u funckije rasipawa odre|ujemo matricu koeficijenata prigu{ewa u slede}em obliku:

$$\mathbf{B}=\frac{bl^2}{2}\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Spu{tawe centra masa (te`i{ta) {tapa OA h_{OA} je:

$$h_{OA}=\frac{l}{2}(1-\cos\varphi)\approx\frac{l\varphi^2}{2},$$

pa je promena potencijalne energije {tapa OA pri izvo|ewu sistema iz ravnote`nog polo`aja:

$$E_{pOA}=-mgh_{OA}=-mgl\frac{\varphi^2}{2}.$$

Spu{tawe centra masa (te`i{ta) {tapa AS h_{AC} je:

$$h_{AC}=l-y_{AC}\approx\frac{l\varphi^2}{2}+\frac{l}{2}(\varphi+\theta_1),$$

pa je promena potencijalne energije {tapa AS pri izvo|ewu sistema iz ravnote`nog polo`aja:

$$E_{pAC}=-mgh_{AC}=-mgl\frac{\varphi^2}{2}-mg\frac{l}{2}(\varphi+\theta_1).$$

Spu{tawe centra mada) te`i{ta {tapa AV h_{AB} je:

$$h_{AB}=l-y_{AB}\approx\frac{l\varphi^2}{2}-\frac{l}{2}(\varphi-\theta_2),$$

pa je promena potencijalne energije {tapa AV pri izvo|ewu sistema iz ravnote`nog polo`aja:

$$E_{pAB}=-mgh_{AB}=-mgl\frac{\varphi^2}{2}+mg\frac{l}{2}(\varphi-\theta_2).$$

Fleksione opruge su u polo`aju stati~ke ravnote`e prednapregnute, pa iz uslova ravnote`e dobijamo slede}e relacije za stati~ke deformacije istih:

$\sum M_A=\frac{mgl}{2}-c_t\theta_{1st}\Rightarrow\quad\theta_{1st}=\frac{mgl}{2c_t}$, analogno je: $\theta_{2st}=\frac{mgl}{2c_t}$.

Relativno sabijawe (izdu`ewe) opruga AD_1 i AD_2 je:

$$\Delta AD_1=2l\sin\left(\frac{90+\varphi}{2}\right)-l\sqrt{2}\approx l\sqrt{2}\left(-\frac{\varphi^2}{8}+\frac{\varphi}{2}\right);$$

$$\Delta AD_2=-2l\sin\left(\frac{90-\varphi}{2}\right)+l\sqrt{2}\approx l\sqrt{2}\left(\frac{\varphi^2}{8}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Promena potencijalne energije sistema, pri izvo|ewu sistema iz ravnote`nog polo`aja je:

$$E_p=E_{pOA}+E_{pAB}+E_{pAC}+\frac{1}{2}c_t\left[(\theta_{1st}+\theta_1)^2-\theta_{1st}^2\right]+\frac{1}{2}c_t\left[(\theta_{2st}+\theta_2)^2-\theta_{2st}^2\right]+\frac{1}{2}c\Delta AD_1^2+\frac{1}{2}c\Delta AD_2^2,$$

te s obzirom na sve do sada izra~unato sledi:

$$2E_p=c_t\left(-\frac{5mgl}{2c_t}\varphi^2+\frac{cl^2}{c_t}\varphi^2+\theta_1^2+\theta_2^2\right),$$

Ako uvedemo zadatkom zadate smene parametara sistema za pojednostavqewe ra~unawa, matrica kvazielasti~nih elemenata je oblika:

$$\mathbf{C} = c_t \begin{pmatrix} k_c - k_m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = c_t \overline{\mathbf{C}} .$$

Da bi prikazana konfiguracija {tapova, opruga i prigu{nica bila stabilna matrica kvazielasti~nih elemenata mora biti takva da kvadratna forma potencijalne energije u okolini polo`aja ravnote`e bude pozitivno definitna, pa se dobije uslov koji zadovoqavaju elementi matrice kvazielasti~nih koeficijenata, a sa tim i parametri sistema:

$$k_c - k_m \succ 0 \Rightarrow \quad k_c \succ k_m \Rightarrow \quad \frac{c}{m} \succ \frac{5g}{2l} .$$

Lagrange-eove jedna~ine druge vrste za generalisane koordinate $\theta_1, \varphi, \theta_2$, u matri~nom obliku su:

$$\mathbf{A}\begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{C}\begin{Bmatrix} \varphi \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{B}\begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

Pretpostavimo re{ewe u obliku:

$$\{\varphi\} = \{A_1\}e^{\lambda t}; \{\theta_1\} = \{A_2\}e^{\lambda t}; \{\theta_2\} = \{A_3\}e^{\lambda t};$$

pa sistem Lagrange-ovih jedna~ina kretawa posmatranog materijalnog sistema se svodi na sistem homogenih algebarskih jedna~ina, ~iji je matri~ni oblik po nepoznatim amplitudama A_1, A_2 i A_3:

$$(\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C})\{A_k\} = 0 .$$

Odavde se dobija karakteristi~na jedna~ina sistema i to iz uslova da determinanta sistema homogenih algebarskih jedna~ina treba da bude jednaka nuli, da bi sistem imao re{ewa koja su razli~ita od trivijalnih i nultih. Na osnovu toga pi{emo:

$$f(\lambda) = \left|\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C}\right| = \frac{ml^2}{3}\left|\lambda^2 \overline{\mathbf{A}} + \delta\lambda \overline{\mathbf{B}} + \omega_0^2 \overline{\mathbf{C}}\right| = \begin{vmatrix} 9\lambda^2 + 4\delta\lambda + \omega_0^2 (k_c - k_m) & \lambda^2 + \delta\lambda & -\lambda^2 - \delta\lambda \\ \lambda^2 + \delta\lambda & \lambda^2 + \delta\lambda + \omega_0^2 & 0 \\ -\lambda^2 - \delta\lambda & 0 & \lambda^2 + \delta\lambda + \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

Posledwa jedna~ina je karakteristi~ni polinom sistema:

$$(\lambda^2 + \delta\lambda + \omega_0^2)\left\{\left[9\lambda^2 + 4\delta\lambda + \omega_0^2 (k_c - k_m)\right]\left(\lambda^2 + \delta\lambda + \omega_0^2\right) - 2(\lambda^2 + \delta\lambda)^2\right\} = 0 ,$$

odakle lako mo`emo izra~unati dva korena te jedna~ine:

$$\lambda_{1/2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - 48\dfrac{c_t m}{l^2}}}{4m} .$$

b* Ako se iz sistema izbace prigu{nice frekventna jedna~ina, malih oscilacija sistema oko nazna~enog ravnote`nog polo`aja je:

$$f(u)=\left|\mathbf{C}-\omega^2\mathbf{A}\right|=c_t\left|\overline{\mathbf{C}}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\overline{\mathbf{A}}\right|=\left|\overline{\mathbf{C}}-u\overline{\mathbf{A}}\right|=\begin{vmatrix}(k_c-k_m)-9u & -u & u\\ u & 1-u & 0\\ -u & 0 & 1-u\end{vmatrix}=0,$$

$$(1-u)\left[7u^2-u(9+k_c-k_m)+k_c-k_m\right]=0,$$

i weni koreni su sopstvene vrednosti sistema:

$$u_{1/3}=\frac{(9+k_c-k_m)\pm\sqrt{(9+k_c-k_m)^2-28(k_c-k_m)}}{14}, \quad u_2=\frac{\omega^2}{\omega_0^2}=1.$$

Sledi da je druga po redu spstvena kru`na frekvencija malih oscilacija sistema oko nazna~enog stabilnog ravnote`nog polo`aja:

$$\omega_2^2=\frac{3c_t}{ml^2}.$$

c* Ako su sva tri {tapa kruto spojena u ta~ki A pod pravim uglom onda je to sistem sa jednim stepenom slobode kretawa i generalisana koordinata je ugao otklona od vertikalnog polo`aja φ.

Kineti~ka energija takvog sistema je:

$$E_k=\frac{1}{2}J_o\dot{\varphi}^2=\frac{3}{2}ml^2\dot{\varphi}^2;$$

Promena potencijalne energije je:

$$E_p=-\frac{5}{4}mgl\varphi^2+cl^2\varphi^2.$$

Lagrang-eova jedna~ina druge vrste za generalisanu koordinatu φ je:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial E_k}{\partial\varphi}+\frac{\partial E_p}{\partial\varphi}=0\Rightarrow 3ml^2\ddot{\varphi}+l\varphi\left(2cl-\frac{5mg}{2}\right)=0$$

$$\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0$$

Odavde je kvadrat kru`ne frekvencije malih oscilacija oko polo`aja stabilne ravnote`e:

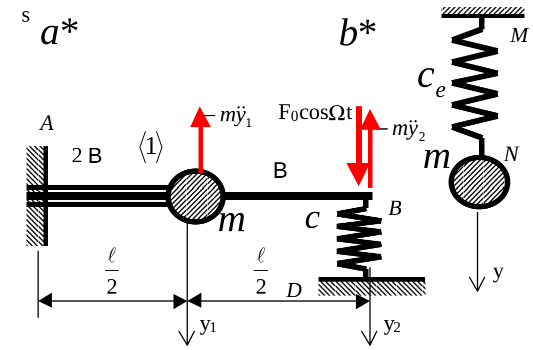
$$\omega^2=\frac{1}{6}\left(\frac{4\mathbf{c}}{\mathbf{m}}-\frac{5\mathbf{g}}{\mathbf{l}}\right).$$

NAPOMENA: Ako za generalisane koordinate izaberemo apsolutne uglove otklona pojedinih {tapoa u odnosu na ravnote`ni polo`aj φ_1, φ_2, i φ_3 Izrazi za inercionu matricu, matricu kvazielasti~nih elemenata i matrica koeficijenata prigu{ewa:

$$\mathbf{A}=\frac{ml^2}{3}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 7 & \\ & & 1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}=c_t\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2+k_c-k_m & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \mathbf{B}=\frac{bl^2}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Karakteristi~ni polinom, sopstvene vrednosti su iste kao {to su dobijene u prethodnom delu pod **a***, isto va`i i za sopstvene kru`ne frekvencije koje su skalarno svojstvo sistema i ne zavise od izbora generalisanih koordinata, niti zavise od matemati~kog opisivawa kretawa, koje je “alat” za re{avawe zadatka.

Zadatak 3.



Slika 3

Koristi}emo zadatkom usvojene smene:

$$p=\frac{l^3}{3\cdot 2^5\,\mathrm{B}};\quad u=pm\omega^2;\quad k=pc;\quad v=pm\Omega^2;\quad h=pF_0 .$$

Sistem na slici br. 3 sastavqen od lake elasti~ne konzole koja nosi teret u obliku modela materijalne ta~ake na sredini raspona, a na slobodnom kraju konzole, koji je elasti~no pri~vr{}en oprugom krutosti c , pretpostavimo da se nalazi materijalna ta~ka mase $m_2=0$, tako da sistem ima dva stepena slobode oscilovawa. To su pomerawa preseka konzola, y_1 i y_2 u kojima su te materijalne ta~ke u~vr{}ewe.

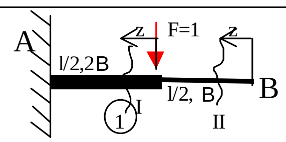
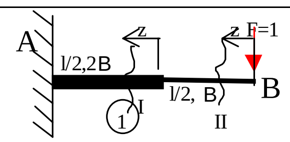
Diferencijalne jedna~ine oscilovawa materijalnih ta~ka na lakim elasti~nom nosa~u pi{emo pomo}u uticajnih koeficijenata, izra~uvawem dinami~kog ugiba preseka, u kojima su postavqene materijalne ta~ke i vode}i ra~una o tome da se javqaju sile inercije $\left(-m_1\ddot{y}_1\right)$ i $\left(-m_2\ddot{y}_2\right)$, kao i sila elasti~nosti deformisane opruge, kojom je vezan kraj konzole $-cy_2$ su:

$$y_1=\alpha_{11}\left(-m_1\ddot{y}_1\right)+\alpha_{1B}\left[-cy_2+\left(-m_2\ddot{y}_2\right)\right]$$
$$y_2=\alpha_{B1}\left(-m_1\ddot{y}_1\right)+\alpha_{BB}\left[\left(-m_2\ddot{y}_2\right)-cy_2\right],$$

gde je $m_1=m;\ m_2=0$. Imaju}i u obzir da je zami{qena materijalna ta~ka mase $m_2=0$, prethodni sistem diferencijalnih jedna~ina se svode na:

$$y_1=\alpha_{11}\left(-m\ddot{y}_1\right)+\alpha_{1B}\left(-cy_2\right)$$
$$y_2=\alpha_{B1}\left(-m\ddot{y}_1\right)+\alpha_{BB}\left(-cy_2\right),$$

Zato }emo sada, prvo odrediti potrebne uticajne koeficijente pomerawa usled dejstva jedini~nih sila. Na skicama su prikazani laki elasti~ni nosa~i, konzole sa odgovaraju}im presecima i koordinatama du` wihovih osa, kao i savojne krutosti i du`ine pojednih delova raspona, koje je potrebno znati kada se sastavqaju izrazi za napadne momente od dejstva jedni~nih sila, kako bi smo lak{e sagledali odre|ivawe uticajnih koeficijenata:

		
$M_I^{Y=1}$=-z	$M_I^{Y=1}$=-(l+z)	I : 0<z<l/2,2B
$M_{II}^{Y=1}$=0	$M_{II}^{Y=1}$=-z	II : 0<z<l/2, B

Uticajni koeficijenti pomerawa preseka i usled dejstva (jedini~nih) sila u preseku k su:

$$\alpha_{11} = \sum_k \frac{1}{B_k} \int_k \left[M_f^{F=1}(z)\right]^2 dz = \frac{1}{2B} \int_0^{l/2} z^2 dz = \frac{l^3}{3 \cdot 2^5 B} = 2p;$$

$$\alpha_{BB} = \sum_k \frac{1}{B_k} \int_k \left[M_f^{F=1}(z)\right]^2 dz = \frac{1}{B} \int_0^{l/2} z^2 dz + \frac{1}{2B} \int_0^{l/2} (z+l)^2 dz = \frac{3l^3}{2^4 B} = 18p;$$

$$\alpha_{1B} = \alpha_{B1} = \sum_k \frac{1}{B_k} \int_k \left[M_{f(1)}^{F=1}(z)\right]\left[M_{f(2)}^{F=1}(z)\right] dz = \frac{1}{2B} \int_0^{l/2} z(z+l) dz = \frac{5l^3}{3 \cdot 2^5 B} = 5p.$$

Sada diferencijalne jedna~ine oscilovawa materijalnih ta~aka dobijaju oblik:

$$y_1 = 2p(-m\ddot{y}_1) - 5pcy_2$$
$$y_2 = 5p(-m\ddot{y}_1) - 18pcy_2$$

Re{avaju}i drugu jedna~inu ovog sistema po y_2 i unose}i dobijeno ra{ewe u prvu jedna~inu prethodnog sistema, dobija se diferencijalna jedna~ina oscilovawa materijalne ta~ke na lakom konzolnom nosa~u u obliku:

$$\ddot{y}_1 + y_1 \frac{1+18k}{mp(11k+2)} = 0;$$

odakle zakqu~ujemo da je spstvena kru`na frekvencija malih oscilacija materijalne ta~ke na lakom konzolnom nosa~u:

$$\omega^2 = \frac{1+18k}{mp(11k+2)}.$$

Kako je diferencijalna jedna~ina oscilovawa vertikalnog harmonijskog oscilatora bez podloge prkazanog na slici 3.b. :

$$\ddot{y} + y\frac{c_{ekv}}{m} = 0,$$

zakqu~ujemo da zadatkom tra`ena ekvivalentna krutost zavojne opruge ne kojoj bi materijalna ta~ka oscilovala sa istom kru`nom frekvencijom kao i na lakom elsti~nom nosa~u ima vrednost:

$$c_{ekv} = \frac{1+18k}{p(11k+2)}.$$

Diferencijalne jedna~ine prinudnog oscilovawa materijalnih ta~aka na lakom konzolnom nosa~u pod dejstvom prinudna sile u preseku V su oblika:

$$y_1 = \alpha_{11}(-m_1\ddot{y}_1) + \alpha_{1B}\left[-cy_2 + (-m_2\ddot{y}_2)\right] + \alpha_{1B}F_0 \cos\Omega t$$
$$y_2 = \alpha_{B1}(-m_1\ddot{y}_1) + \alpha_{BB}\left[(-m_2\ddot{y}_2) - cy_2\right] + \alpha_{BB}F_0 \cos\Omega t,$$

gde je $m_1 = m; \quad m_2 = 0$. Posle sre|ivawa i uno{ewa zadatkom zadatih smena i pretpostavqawem re{ewa u obliku:

$$y_1 = C_1 \cos\Omega t,$$
$$y_2 = C_2 \cos\Omega t;$$

iz ovog sistema se dobija slede}i sistem algebarskih jedna~ina:

$$C_1(1-2v) + 5kC_2 = 5h$$
$$-5vC_1 + (1+18k)C_2 = 18h.$$

Ovaj sistem algebarskih jedna~ina po nepoznatim amplitudama prinudnog oscilovawa C_1 i C_2 je sistem nehomogenih algebarskih jedna~ina i da bi on imao definisana re{ewa, potrebno je da determinanta ovog sisitema bude razli~ita od nule. Determinanta tog sistema je:

$$f(v = pm\Omega^2) = \Delta(v) = \begin{vmatrix} 1-2v & 5k \\ -5v & 1+18k \end{vmatrix} = 1 + 18k - v(11k+2) \neq 0 .$$

Determinanta sistema treba da je razli~ita od nule, jer se radi o nerezonantnom stwu kada je $\Delta(v) \neq 0$.

Rezonantna vrednost kru`ne frekvencije prinudne sile se dobija iz uslova da determinanta sisitema nehomogenih algebarskih jedna~ina bude jednaka nuli, pa se ta vrednost odre|uje u obliku:

$$\Omega_{rez}^2 = \frac{18k+1}{pm(11k+2)} \qquad \text{(A*)}$$

Amplitude prinudnih oscilacija C_1 i C_2 odre|ujemo Kramer-ovim pravilom, re{avaju}i prethodno dobijeni sistem nehomogenih algebarskih jedna~ina:

$$C_1 = \frac{\Delta_{C1}}{\Delta(v)} = \frac{h}{\Delta(v)} \begin{vmatrix} 5 & 5k \\ 18 & 18k+1 \end{vmatrix} = \frac{5h}{\Delta(v)}$$

$$C_2 = \frac{\Delta_{C2}}{\Delta(v)} = \frac{h}{\Delta(v)} \begin{vmatrix} 1-2v & 5 \\ -5v & 18 \end{vmatrix} = \frac{(18-11v)h}{\Delta(v)}$$

Iz prethodno odre|enih izraza za amplitude prinudnih oscilacija zakqu~ujemo da amplituda C_2 mo`e biti jednaka nuli kada je:

$$C_2 = 0 \quad \text{za} \quad v_a = \frac{18}{11} \Rightarrow \Omega_a^2 = \frac{18}{11pm}$$

Kada sistem prinudno osciluje ugaonom frekvencom Ω_a tada je on za materijalnu ta~ku mase m dinami~ki apsorber . To zna~i da iako na konzolu dejstvuje spoqa{wa prinudna sila frekvencije Ω_a materijalna ta~ka prinudno miruje na nosa~u.

Diferencijalne jedna~ine prinudnog oscilovawa materijalnih ta~aka na lakom konzolnom nosa~u pod dejstvom prinudna sile u preseku (1) su oblika:

$$y_1 = \alpha_{11}\left(-m_1\ddot{y}_1\right) + \alpha_{1B}\left[-cy_2 + (-m_2\ddot{y}_2)\right] + \alpha_{11}F_{01}\cos\Omega t$$

$$y_2 = \alpha_{B1}\left(-m_1\ddot{y}_1\right) + \alpha_{BB}\left[\left(-m_2\ddot{y}_2\right) - cy_2\right] + \alpha_{B1}F_{01}\cos\Omega t \; ,$$

gde je $m_1 = m; \quad m_2 = 0$. $m_1 = m; \quad m_2 = 0$. Posle sre|ivawa i uno{ewa zadatkom zadatih smena i pretpostavqawem re{ewa u obliku:

$$y_1 = C_1 \cos\Omega t \, ,$$

$$y_2 = C_2 \cos\Omega t \, ;$$

iz ovog sistema se dobija slede}i sistem algebarskih jedna~ina:

$$C_1(1-2v) + 5kC_2 = 2h_1$$

$$-5vC_1 + (1+18k)C_2 = 5h_1 \, ,$$

gde je $h_1 = pF_{01}$. Ovaj sistem algebarskih jedna~ina po nepoznatim amplitudama prinudnog oscilovawa C_1 i C_2 je sistem nehomogenih algebarskih jedna~ina i da bi on imao definisana re{ewa, potrebno je da determinanta ovog sisitema bude razli~ita od nule. Determinanta tog sistema je:

$$f(v = pm\Omega^2) = \Delta(v) = \begin{vmatrix} 1-2v & 5k \\ -5v & 1+18k \end{vmatrix} = 1 + 18k - v(11k+2) \neq 0 .$$

Determinanta sistema treba da je razli~ita od nule, jer se radi o nerezonantnom stawu kada je $\Delta(v) \neq 0$.

Rezonantna vrednost kru`ne frekvencije prinudne sile se dobija iz uslova da determinanta sisitema nehomogenih algebarskih jedna~ina bude jednaka nuli, pa se ta vrednost odre|uje u obliku:

$$\Omega_{rez}^2 = \frac{18k+1}{pm(11k+2)} \quad .$$

Vidimo da je rezonantna vrednost frekvencije prinudne sile i u ovom slu~aju dejstva prinudne sile u preseku (1) ista kao i vrednost (A*) koju smo dobili kada ona dejstvuje u preseku (B). To smo mogli zakqu~iti i bez ra~unawa jer je ta vrednost jednaka kru`noj frekvenciji sopstvenih oscilacija sistema, koja se ne mewa, jer je svojstvo sistema.

Amplitude prinudnih oscilacija C_1 i C_2 odre|ujemo Kramer-ovim pravilom, re{avaju}i prethodno dobijeni sistem nehomogenih algebarskih jedna~ina:

$$C_1 = \frac{\Delta_{C1}}{\Delta(v)} = \frac{h}{\Delta(v)}\begin{vmatrix} 5 & 5k \\ 18 & 18k+1 \end{vmatrix} = \frac{(11k+2)h_1}{\Delta(v)}$$

$$C_2 = \frac{\Delta_{C2}}{\Delta(v)} = \frac{h}{\Delta(v)}\begin{vmatrix} 1-2v & 5 \\ -5v & 18 \end{vmatrix} = \frac{5h_1}{\Delta(v)}$$

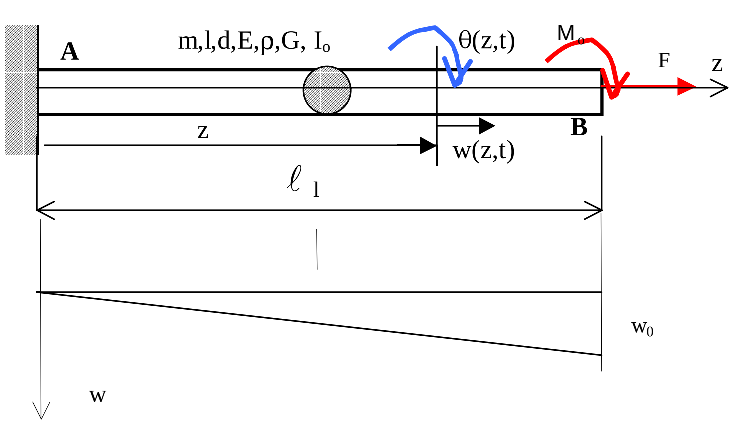
Vidimo da su za amplitude dobijeni razli~iti izrazi u odnosu na izraze dobijene u prethodnom slu~aju, jer je promewen presek dejstva sile. Da bi materijalna ta~ka imala isti zakon prinudnog oscilovawa u ovom slu~aju kada dejstvuje u preseku (1), kao i kada prinudna sila dejstvuje u preseku (V) , amplitude oscilovawa materijalne ta~ke moraju biti iste u oba slu~aja pa sledi:

$$5h = (11k+2)h_1 \quad \Rightarrow \frac{h_1}{h} = \frac{5}{(11k+2)} \quad \Rightarrow F_{01} = \frac{5F_0}{(11k+2)}$$

Analogno zakqu~ujemo da :

$$F_{0e} = F_0, \qquad \text{odnosno} \qquad F_{0e} = F_0 = \frac{11k+2}{5}F_{01} \quad .$$

Zadatak 4.



Slika br. 4

Najve}e uzdu`no pomerawe koje je ostvareno pod dejstvom sile $F$ u stawu stati~ke ravnote`e vratila je: $w_0 = \dfrac{Fl}{EA}$ na slobodnom kraju {tapa. Zakon promene uzdu`nog pomerawa popre~nih preseka za ovako ukle{ten vaqak prikazan je na slici br. 4, u stati~kim uslovima aksijalnog naprezawa silom na slobodnom kraju je:

$$w = w\ (z, o) = f(z) = \frac{w_0}{l}z; \quad 0 \le z \le l \quad (\text{A*})$$

Parcijalna diferencijalna jedna~ina longitudunalnih oscilacija homogenog vaqka je:

$$\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}, \qquad c^2 = \frac{E}{\rho}, \tag{1}$$

gde je $w(z,t)$ uzdu`no pomerawe du` ose z vaqka. Re{ewe prethodne parcijalne diferencijalne jedna~ine uzdu`nih (longitudinalnih) oscilacija konzolnog vaqka predpostavqamo, prate}i ideju Danijel-a Bernoulli-ja u obliku proizvoda dveju funkcija:

$$w(z,t) = T(t)Z(z),$$

koje smo odredili u obliku (vidi teoriju iz uxbenika D. Ra{kovi}: Teorija oscilacija):

$$T(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t$$

$$Z(z) = C_1 \cos\lambda z + C_2 \sin\lambda z \quad ,$$

pa je:

$$\mathrm{w(z,t)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} z\right)[A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t],$$

gde je $Z_n(z) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} z\right)$ sopstvena, ortogonalna funkcija za konzolni vaqak, ukle{ten na jednom kraju, a slobodan na dugom kraju, koju dobijamo iz grani~nih uslova takvog na~ina oslawawa:

Za:

$$z = 0 \quad w(0,t) = 0 \Rightarrow Z(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$z = l \quad M_t = EA\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=l} = 0 \Rightarrow Z'(l) = \lambda C_2 \cos\lambda l = 0 \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$$

Po~etni uslovi su zadati pomo}u prethodnog zatezawa konzole u aksijalnom pravcu silom na slobodnom kraju na osnovu ~ega smo dobili izraz (A*) uslovom da je konzola mirovala pa su po~etne brzine bile jednake nuli. Na osnovu toga po~etne uslove pi{emo u obliku:

Za t=0 sledi:

$$\frac{\partial w}{\partial t}(z,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{(2n-1)\pi}{2l} z \Rightarrow \quad B_n = 0;$$

$$w = w\ (z,o) = f(z) = \frac{w_0}{l} z; \quad 0 \le z \le l$$

$$\mathrm{w(z,0)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l} z = f(z)$$

$$A_n = \frac{\int_0^l f(z) \sin\frac{2n-1}{l}\frac{\pi}{2} z dz}{\int_0^l \sin^2\frac{2n-1}{l}\frac{\pi}{2} z dz} = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{w_0}{l} z \sin\frac{(2n-1)\pi}{2l} z dz = \frac{8w_0}{(2n-1)^2\pi^2} \sin\frac{(2n-1)\pi}{2} = \frac{8w_0}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}$$

I iz tih po~etnih uslova smo odredili nepoznate koeficijente razvoja pretpostavqenog re{ewa.

Sada zakon longitudinanih oscilacija ima oblik:

$$w(z,t) = \frac{8Fl}{EA\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin\frac{(2n-1)\pi}{2l} z \cos\frac{(2n-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t$$

Koriste}i analogiju izme|u longitudinalnih i torzijskih oscilacija homogenog vaqkastog {tapa datu slede}om tabelom:

Torzijske oscilacije		Longitudinalne oscilacije
$\theta(z,t)$	$\rightarrow$	$w(z,t)$
G	$\rightarrow$	E
J_z	$\rightarrow$	m
c_t	$\rightarrow$	c
I_0	$\rightarrow$	A
ρ	$\rightarrow$	ρ
M	$\rightarrow$	F
$T = GI_0$	$\rightarrow$	$A = EA$

direktno mo`emo pisati zakon torzijskih oscilacija vaqka posle prestanka dejstva na slobodnom kraju sprega momenta M_o:

$$\theta(z,t) = \frac{8M_0\ell}{GI_0\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}z\cos\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}\sqrt{\frac{G}{\rho}}t$$