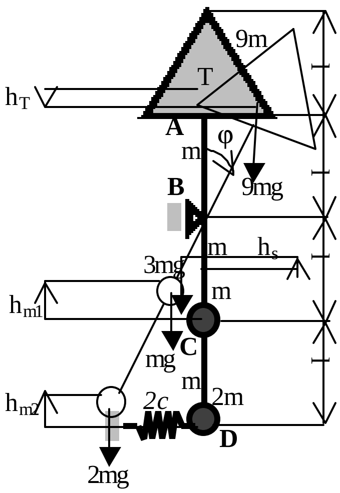
Re{ewa ispitnih zadataka sa pismenog dela ispita iz predmeta

ELASTODINAMIKA

6 jun 2001

1.zadatak



Slika br. 1

Siastem ima jedan stepen slobode oscilovawa. Za generalisanu koordinatu usvajamo ugao j otklona {tapa AD od vertikalnog pravca, kako je to nazna~eno na slici br. 1.

Zadatkom je zadato da je visina jednakostrani~nog trougla ℓ te sledi da je stranica jednakostrani~nog trougla $a=\frac{2\ell\sqrt{3}}{3}$; sa slike se vidi da je sabijawe opruge: $\Delta x = 2\ell \cdot j$, gde je ugaoni otklon {tapa AD jednak φ, meren od vertikale, izabran za generalisanu koordinatu.

Promena potencijalne energije sistema pri izvo|ewu sistema iz polo`aja ravnote`e otklonom {tapa AD za ugao φ, je:

$$E_p = E_{p\Delta} + E_{pc} + E_{pm_1} + E_{pm_2} + E_{ps} =$$

$$E_p = -6mglj^2 + 4cl^2j^2 + \frac{1}{2}mglj^2 + 2mglj^2 + \frac{3}{4}mglj^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{E_p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{mgl}\,j^2\left(\mathbf{16}\frac{\mathbf{cl}}{\mathbf{mg}} - \mathbf{11}\right)$$

U prethodnom izrazu za promenu potencijalne energije su:

$$E_{p\Delta} = 9mgh_T = 12mgl(1-\cos j) = -6mglj^2,$$

promena potencijalne energije trougaone plo~ice, koja je negativna, jer se vr{i pozitivan rad $+9mgh_T$ spu{tawem centra mase plo~ice za visinu h_T ;

$$E_{pc} = \frac{1}{2}2c\Delta x^2 = 4cl^2j^2,$$

promena potencijalne energije opruge, jednaka deformacionom radu koji je izvr{en na sabijawu opruge za $\Delta x = 2l \cdot j$;

$$E_{pm_1} = mgh_{m_1} = mgl(1-\cos j) = \frac{1}{2}mglj^2,$$

promena potencijalne energije materijalne ta~ke mase m u ta~ki C koja se podi`e za h_{m1};

$$E_{pm_2} = mgh_{m_2} = 2mg2l(1-\cos j) = 2mglj^2,$$

promena potencijalne energije materijalne ta~ke mase $2m$ u ta~ki D koja se podi`e za h_{m2}.

$$E_{ps} = 3mgh_s = 3mg\frac{l}{2}(1-\cos j) = \frac{3}{4}mglj^2,$$

promena potencijalne energije {tapa mase 3m koja je pozitivna, jer se vr{i negativan rad $-3mgh_T$ podizawem centra mase {tapa h_s;

U polo`aju ravnote`e sisitema, potencijalna energija ima ekstrmnu vrednost pa je prvi izvod E_p po generalisanoj koordinati jednak nuli : $\frac{\partial E_p}{\partial j}=\frac{1}{2}lj(16cl-11mg)=0$ odakle sledi da je za $j=0$, polo`aj ravnote`e sistema, dok je kriti~na veza parametara sisitema jednaka: $cl=\frac{11}{16}mg$.

Uslov da polo`aj ravnote`e $j=0$ bude stabilan je da potencijalna energija E_p u polo`aju ravnote`e bude u minimumu, pa je potrebno da je drugi izvod po generalisanoj koordinati bude pozitivan, odakle sledi da je uslov stabilnosti dat slede}om vezom parametara sistema:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial j^2}\succ 0 \Rightarrow \frac{1}{2}l(16lc-11mg)\succ 0 \Rightarrow \qquad c\succ\frac{11mg}{16l}:$$

Kineti~ka energija sistema je: $E_k=E_{k\Delta}+E_{km_1}+E_{km_2}+E_{ks}\Rightarrow \mathbf{E_k}=\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{2}}\mathbf{ml^2}\dot{j}^2$;

gde su:

$$E_{k\Delta}=\frac{1}{2}J_{BT}\dot{j}^2=\frac{17}{2}ml^2\dot{j}^2;$$

kineti~ka energija trougaone plo~ice, gde je J_{VT} aksijalni moment inercije mase plo~ice za osu obrtawa kroz ta~ku V, dok je J_T aksijalni moment inercije trougaone plo~ice za paralelnu te`i{nu osu:

$$J_{BT}=J_T+\overline{BT}^2 3m=ml^2+\left(\frac{4}{3}l\right)^2 9m=17ml^2,$$

$$J_T=rI_T=\frac{M}{A}(I_x+I_h)=\frac{9m}{\frac{l^2\sqrt{3}}{3}}2\frac{a^4\sqrt{3}}{96}=ml^2, \qquad E_{km1}=\frac{1}{2}mv_{m1}^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{j}^2$$

,

kineti~ka energija materijalne ta~ke mase m u ta~ki C ,

$$E_{km2}=\frac{1}{2}2mv_{m2}^2=\frac{1}{2}2m4l^2\dot{j}^2=4ml^2\dot{j}^2,$$

kineti~ka energija materijalne ta~ke mase 2m u ta~ki D.

$E_{ks}=\frac{1}{2}J_S\dot{j}^2=\frac{1}{2}3ml^2\dot{j}^2$; kineti~ka energija {tapa, gde je J_S aksijalni moment inercije mase {tapa tapa za osu obrtawa kroz V:

$$J_S=J_T+\overline{BT_S}^2 3m=\frac{1}{12}3m(3l)^2+\left(\frac{1}{2}l\right)^2 3m=3ml^2,$$

Drugi na~in:

$$E_k=\frac{1}{2}J_B\dot{j}^2,$$

gde je: $J_B=J_{BT}+ml^2+2m(2l)^2+J_S=29ml^2$, aksijalni moment inercije mase sistema za osu obrtawa kroz ta~ku V.

Lagrang-eova jedna~ina druge vrste za generalisanu koordinatu φ je:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{j}}-\frac{\partial E_k}{\partial j}+\frac{\partial E_p}{\partial j}=0 \qquad 29ml^2\ddot{j}+\frac{1}{2}lj(16cl-11mg)=0$$ odnosno sledi da je: $$\ddot{j}+w^2 j=0$$

Odavde je kvadrat kru`ne frekvencije malih oscilacija oko polo`aja stabilne ravnote`e:

$$v^2=\frac{\mathbf{1}}{58}\left(\mathbf{16}\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{m}}-\mathbf{11}\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{l}}\right).$$

2. zadatak

Na slici br. 2 su obele`ene slede}e koordinate $q$ , $j$ i $x$ , pomo}u kojih odre|ujemo polo`aje pojedinih elemenata sistema i konfiguraciju sistema u prikazanom na slici polo`aju ravnote`e, u kome su su sve te koordinate jednake nuli i u proizvoqnom polo`aju kada se sistem izveden iz polo`aja ravnote`e. Kako postoji veza izme|u tih koordinata dve su od wih nezavisne, te sistem ima dva stepena slobode kretawa i oscilovawa u op{tem slu~aju. Za generalisane kordinate mo`emo izabrati dve, pa }emo se opredeliti za koordinatu q i koordinatu x ili wihove umno{ke nekim skalarom, koji }emo izabrati da bi pojednostavili ra~un. O tome }emo odlu~iti "u hodu" pri izradi zadatka, ako to nije tekstom zadatka dato kao preporuka.

Sada pre|imo na analizu veza koordinata sistema i izabranih generalisanih koordinata. Prvo pre|imo na odre|ivawe brzine balansera B:

$$\overline{OO_1} = 3R; \quad v_{01} = R\dot{j}$$
$$v_{01} = 3R\dot{q} \qquad \Rightarrow \dot{j} = 3\dot{q};$$

Balanser izvodi prenosno i relativno kretawe pa je wegova brzina:

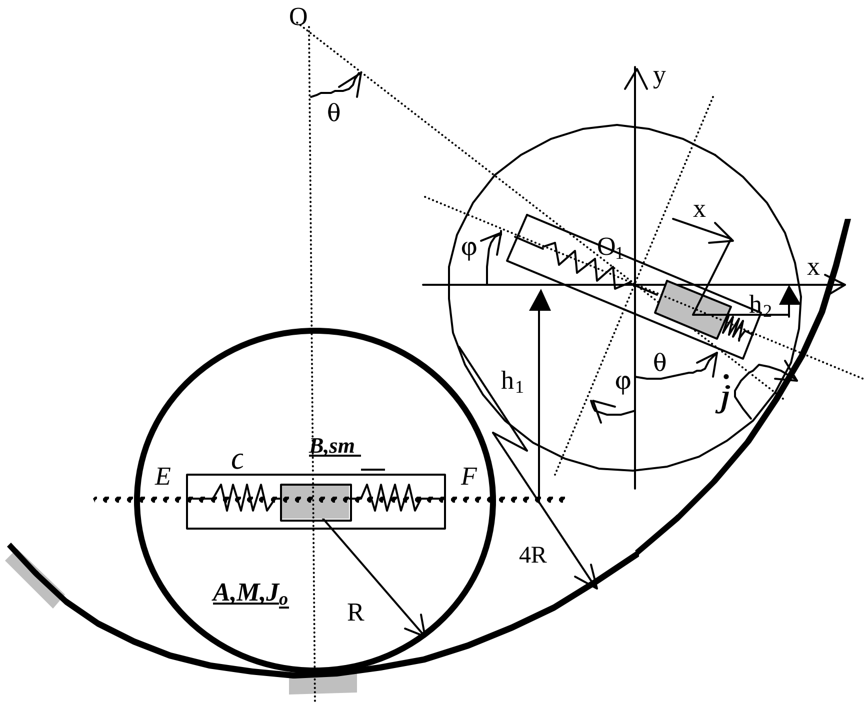
$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{v}_r + \vec{v}_p$$
$$v_r = \dot{x}; \quad \vec{v}_p = \vec{v}_{01} + \vec{v}_B^{\,01}; \quad v_{Bx} = \dot{x} + v_{01}\cos(j+q) = \dot{x} + 3R\dot{q}\cos 4q$$
$$v_{By} = v_{01}\sin(j+q) - v_B^{01} = 3R\dot{q}\sin 4q - 3Rx\dot{q}$$
$$v_B^2 = v_{Bx}^2 + v_{By}^2 = \left(\dot{x} + 3R\dot{q}\cos 4q\right)^2 + \left(3R\dot{q}\sin 4q - 3\dot{x}R\dot{q}\right)^2$$
$$= \dot{x}^2 + \left(3R\dot{q}\right)^2 + 6R\dot{q}\dot{x}\cos 4q - 9R^2\dot{q}^2x^2\sin 4q$$

^etvrti ~lan prethodnog izraza zanemarujemo kao malu veli~inu vi{eg (tre}eg) reda $e^3 \approx -x^2\dot{q}^2 \approx 0$ u odnosu na ostale ~lanove i posle razvijawa funkcija $\sin 4q$ n $\cos 4q$ u Taylor-ov red i zanemarivawa kvadratnog i ostalih ~lanova kao malih veli~ina vi{eg reda $\sin 4q \approx 4q, \quad \cos 4q \approx 1$ sledi da mo`emo napisati da je:

$$v_B^2 \approx \left(\dot{x} + 3R\dot{q}\right)^2.$$

Kineti~ka energija sistema:

$$E_k = E_{kA} + E_{kB} \Rightarrow$$
$$E_k = \frac{1}{2}J_P w_P^2 + \frac{1}{2}smv_B^2$$
$$2E_k = 9mR^2\dot{q}^2\left[m(1+\tilde{i}_0^2) + s\right] + 6smR\dot{x}\dot{q} + sm\dot{x}^2$$



Slika br. 1

Sistem ima dva stepena slobode kretawa, kao {to smo u po~etku naglasili.

I. Za generalisane koordinate sistema mo`emo da izaberimo: umno`ak $3Rq$ ugla q i koordinatu x translacije balansera.

U tom slu~aju matrica inercijskih koeficijenata je:

$$\mathbf{A} = m\begin{pmatrix} \left[m(1+\tilde{i}_0^{\,2})+s\right] & s \\ s & s \end{pmatrix}$$

II. Za generalisane koordinate sistema mo`emo da izaberimo: umno`ak Rq ugla q i koordinatu x translacije balansera.

U tom slu~aju matrica inercijskih koeficijenata je:

$$\mathbf{A} = m\begin{pmatrix} 9\left[m(1+\tilde{i}_0^{\,2})+s\right] & 3s \\ 3s & s \end{pmatrix}$$

II. Za generalisane koordinate sistema mo`emo da izaberimo: ugao q i koordinatu x translacije balansera:

U tom slu~aju matrica inercijskih koeficijenata je:

$$\mathbf{A} = m\begin{pmatrix} 9R^2\left[m(1+\tilde{i}_0^{\,2})+s\right] & 3sR \\ 3sR & s \end{pmatrix}$$

Iz ovih, prethodno izvedenih izraza za matricu inercijskih koeficijenata za sva tri slu~aja, vidimo da je najboqe izabrati za generalisane koordinate pomo}u kojih }emo daqe re{avati zadatak slede}e: umno`ak $3Rq$ ugla $q$ i koordinatu $x$ translacije balansera, jer su elementi u matrici inercionih koefcijenata bezdimenzioni skalari umno`eni masom.

Za sastavqawe izraza za kineti~ku energiju koristili smo izraze za kineti~ke energije pojedinih delova sistema, me|u kojima su:

$$E_{kA} = \frac{1}{2}M\,v_{01}^2 + \frac{1}{2}J_{01}\dot{j}^{\,2} = \frac{1}{2}M\,9R^2\dot{q}^{\,2} + \frac{1}{2}J_{01}9\dot{q}^{\,2} = \frac{9}{2}MR^2\dot{q}^{\,2}\left(1+\tilde{i}_0^{\,2}\right)$$

kineti~ka energija sfere A, a $i_0^2 = \dfrac{J_0}{M}, \tilde{i}_0^{\,2} = \left(\dfrac{i_0}{R}\right)^2$, kako je zadatkom zadato.

$$E_{kB} = \frac{1}{2}sm\,v_B^2 = \frac{1}{2}sm\left(x^2 + 6R\dot{x}\dot{q} + 9R^2\dot{q}^{\,2}\right)$$, kineti~ka energjia balansera B.

Promena potencijalne energije sistema pri poreme}aju-izlasku iz ravnote`nog polo`aja sistema je:

$$E_p = E_{pA} + E_{pB} + 2E_{pc} = \frac{3}{2}MRq^2 + \frac{s}{2}mg\left(3Rq^2 - 6xq\right) + cx^2 =$$

$$= \frac{3}{2}Rq^2 g(M+sm) - 3smgxq + cx^2 = \frac{3}{2}mRq^2 g(m+s) - 3mgxq + cx^2$$

I. Ako za generalisane koordinate sistema izaberimo: umno`ak $3Rq$ ugla q i koordinatu x translacije balansera, matrica kvazielasti~nih koeficijenata je:

$$\mathbf{C} = \frac{mg}{3R}\begin{pmatrix} m+s & -3s \\ -3s & 6\boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

II. Ako za generalisane koordinate sistema izaberimo: umno`ak Rq ugla q i koordinatu x translacije balansera, matrica kvazielasti~nih koeficijenata je:

$$\mathbf{C} = \frac{mg}{3R}\begin{pmatrix} 9(m+s) & -9s \\ -9s & 6\boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

III. Ako za generalisane koordinate sistema izaberimo: ugao q i koordinatu x translacije balansera, matrica kvazielasti~nih koeficijenata je:

$$\mathbf{C} = \frac{mg}{3R}\begin{pmatrix} 9R^2(m+s) & -9Rs \\ -9Rs & 6k \end{pmatrix}$$

Iz ovih prethodno izabranih izraza za matricu kvazielasti~nihh koeficijenata za sva tri slu~aja, vidimo da je najboqe izabrati za generalisane koordinate, pomo}u kojih }emo daqe re{avati zadatak slede}e: umno`ak $3Rq$ ugla $q$ i koordinatu $x$ translacije balansera, jer su elementi u matrici kvazielasti~nih koefcijenata bezdimenzioni skalari umno`eni jednim ekvivalentnim koeficijentom (kvazi)elasti~nosti $\frac{mg}{3R}$.

Za sastavqawe izraza za promenu potencijalne energije pri izvo|ewu sistema iz ravnote`nog polo`aja, koristili smo izraze za promene pri tome potencijalne energije pojedinih delova sistema, me|u kojima su:

$$E_{pA} = Mgh_1 = Mg3R(1-\cos\boldsymbol{q}) = \frac{3}{2}MgR\boldsymbol{q}^2,$$

promena potencijalne energije sfere A usled podizawa wenog centra masa;

$$E_{pB} = smg(h_1 - h_2) = smg[3R(1-\cos\boldsymbol{q}) - x\sin\boldsymbol{j}] = \frac{s}{2}mg\left(3R\boldsymbol{q}^2 - 6x\boldsymbol{q}\right),$$

promena potencijalne energije balansera B usled podizawa wegovog centra masa;

$$E_{pc} = 2\frac{1}{2}cx^2,$$

promena potencijalne energije opruga pri wihovom deformisawu, skra}ewu, odnosno izdu`ewu.

Da bi prikazani, na slici br. 2, polo`aj ravnote`e bio stabilan matrica kvazielasti~nih koeficijenata treba da bude pozitivno definitna, odnosno da je forma potencijalne energije pozitivno definitna, a to zna~i da determinatna te matrice treba da bude pozitivna kao i wen minor, i iz tog uslova sledi:

$$m+s > 0$$

$$|\mathbf{C}| = \frac{mg}{3R}\begin{vmatrix} m+s & -3s \\ -3s & 6\boldsymbol{k} \end{vmatrix} > 0$$

odnosno

$$m+s \succ 0 \text{ i } (m+s)6\boldsymbol{k} - 9s^2 \succ 0 \Rightarrow 3s^2 - 2\boldsymbol{k}s - 2\boldsymbol{k}m \prec o$$, gde je $\boldsymbol{k} = \frac{cR}{mg}$.

Pa odatle sledi da su matemati~ki dobijene granice parametra s na kojima sistem gubi ili sti~e stabilnost promenom parametra s :

$$s_{01/2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 6km}}{3}$$

S obzirom da s ne mo`e po prirodi da bude negativno to sledi da je uslov stabilnosti nazna~enog na slici br. 2 polo`aja i konfiguracije sitema stabilan ako je taj parametar u granicama

$$0 < s < \frac{k + \sqrt{k^2 + 6km}}{3}$$

Lagrange-eove jedna~ine druge vrste za generalisane koordinate $3Rq$ i x, u matri~nom obliku su:

$$\mathbf{A}\begin{Bmatrix} 3R\ddot{q} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \mathbf{C}\begin{Bmatrix} 3Rq \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} = 0 \;;$$

Pretpostavimo re{ewe:

$$3Rq = A_1 \cos(wt + a); \qquad 3R\ddot{q} = -w^2 A_1 \cos(wt + a)$$

$$x = A_2 \cos(wt + a); \qquad \ddot{x} = -w^2 A_2 \cos(wt + a) \;;$$

pa iz sisitema Lagrange-ovih jedna~ina dobijamo sisitem homogenih algebarskih jedna~ina, ~iji je matri~ni oblik po nepoznatim amplitudama A_1 i A_2:

$$\left| -w^2 \mathbf{A} + \mathbf{C} \right| \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = 0 \,.$$

Odavde se dobija frekfentna jedna~ina iz uslova da je determinanta sistema homogenih algebarskih jedna~ina jednaka nuli:

$$f\left(w^2\right) = \left| \mathbf{C} - w^2 \mathbf{A} \right| = 0$$

odnosno:

$$f\left(u = \frac{3Rw^2}{g}\right) = \begin{vmatrix} (m+s) - u\left[m(1 + \tilde{i}_0^2) + s\right] & -s(3+u) \\ -s(3+u) & 6k - us \end{vmatrix} = 0 \;;$$

odnosno u razvijenom obliku:

$$6\frac{k}{s}\left(\frac{m}{s} + 1\right) - 9 - u\left\{\frac{m}{s} + 7 + 6\frac{k}{s}\left[\frac{m}{s}\left(\tilde{i}_0^2 + 1\right) + 1\right]\right\} + u^2 \frac{m}{s}\left(\tilde{i}_0^2 + 1\right) = 0$$

Da bi frekventna jedna~ina imala samo jedan koren potrebno je da je:

$$6\frac{k}{s}\left(\frac{m}{s} + 1\right) - 9 = 0 \qquad\qquad 3s^2 - 2ks - 2km = 0$$

odakle sledi da su koreni te jedna~ine:

$$s = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 6km}}{3}$$

Vidimo da je dobijena samo jedna vrednost parametra s i to sa pozitivnim znakom +, i to:

$$s_0 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 6km}}{3}$$

i da je na granici vrednosti parametra s kada sistem u nazna~enom polo`aju ravnote`e oko koga osciluje mewa karakter stabilnosti. Dobijena vrednost tog parametra za koju sistem ima samo jednu kru`nu frekvenciju, iako ima dva stepena slobode kretawa je na grani~noj vrednosti parametra s na kojoj sistem gubi ili sti~e stabilnost promenom parametra s.

U tom slu~aju karakteristi~ni brojevi su tada: jedan jednak nuli, a drugi razli~it od nule:

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = \frac{\frac{m}{s} + 7 + 6\frac{k}{s}\left[\frac{m}{s}\left(\tilde{i}_0^{\,2} + 1\right) + 1\right]}{\frac{m}{s}\left(\tilde{i}_0^{\,2} + 1\right)} \qquad \text{ili} \qquad u_2 = \frac{\frac{m}{s} + 7 + 6\frac{k}{s}\left[\frac{m}{s}\left(\frac{i_0^2}{R^2} + 1\right) + 1\right]}{\frac{m}{s}\left(\frac{i_0^2}{R^2} + 1\right)}$$

Za odre|enu vrednost parametra $s_0 = \dfrac{k + \sqrt{k^2 + 6km}}{3}$ taj sopstveni broj razli~it od nule je tada:

$$u_2 = \frac{3 + 25\frac{k}{m} - 9\frac{k}{m}\left(\tilde{i}_0^{\,2} + 1\right)}{3\left(\tilde{i}_0^{\,2} + 1\right)} + \left[\frac{7}{3\left(\tilde{i}_0^{\,2} + 1\right)} + 3\right]\frac{k}{m}\sqrt{6\frac{m}{k} + 1}$$

ili

$$u_2 = \frac{3 + 25\frac{k}{m} - 9\frac{k}{m}\left(\frac{i_0^2}{R^2} + 1\right)}{3\left(\frac{i_0^2}{R^2} + 1\right)} + \left[\frac{7}{3\left(\frac{i_0^2}{R^2} + 1\right)} + 3\right]\frac{k}{m}\sqrt{6\frac{m}{k} + 1}$$

dok je sopstvena kru`na frekvencija razli~ita od nule tada:

$$w_2^2 = \frac{g}{3R}u_2 = \frac{g}{3R}\left\{\frac{3 + 25\frac{k}{m} - 9\frac{k}{m}\left(\tilde{i}_0^{\,2} + 1\right)}{3\left(\tilde{i}_0^{\,2} + 1\right)} + \left[\frac{7}{3\left(\tilde{i}_0^{\,2} + 1\right)} + 3\right]\frac{k}{m}\sqrt{6\frac{m}{k} + 1}\right\}$$

ili

$$w_2^2 = \frac{g}{3R}u_2 = \frac{g}{3R}\left\{\frac{3 + 25\frac{k}{m} - 9\frac{k}{m}\left(\frac{i_0^2}{R^2} + 1\right)}{3\left(\frac{i_0^2}{R^2} + 1\right)} + \left[\frac{7}{3\left(\frac{i_0^2}{R^2} + 1\right)} + 3\right]\frac{k}{m}\sqrt{6\frac{m}{k} + 1}\right\}$$

Posle uvo|ewa zadatih, tekstom zadatka numeri~kih vrednosti za odnose parametara sistema $k = \frac{cR}{mg}$, $i_0^2 = \frac{J_0}{M}$, $m = \frac{M}{m}$, $\tilde{i}_0^{\,2} = \left(\frac{i_0}{R}\right)^2$, $u = \frac{3Rw^2}{g}$:

$$k = \frac{cR}{mg} = 60,\ i_0^2 = \frac{J_0}{M} = \frac{2}{5}R^2, \quad m = \frac{M}{m} = 5,$$

sastavqamo karakteristi~nu determinantu sistema: $f\left(w^2\right) = \left|\mathbf{C} - w^2\mathbf{A}\right| = 0$

$$f\left(u = \frac{3Rw^2}{g}\right) = \begin{vmatrix} (5+s) - u(7+s) & -s(3+u) \\ -s(3+u) & 360 - us \end{vmatrix} = 0$$

koja predstavqa frekventnu jedna~inu i u razvijenom obliku je polinom drugog stepena po karakteristi~nom - sopstvenom broju $u = \frac{3Rw^2}{g}$:

$$7su^2 - u(7s^2 + 365s + 2520) + 1800 + 360s - 9s^2 = 0,$$

odakle da bi jedno re{ewe (koren) bilo nula sledi da slobodan ~lan ove kvadratne jedna~ine po u mora biti jednak nuli: $1800+360s-9s^2=0$. Odakle $s=10(2\mp\sqrt{6})$. Po{to je s pozitivan broj to dolazi u obzir samo re{enje sa znakom +.Tra`ena vrednost parametra s je $s=20+10\sqrt{6}$. Sada odre|ujemo vrednost karakteristi~nog sopstvenog broja $u=\frac{3Rw^2}{g}$, koji je razli~it od nule je:

$$u_2=\frac{253+196\sqrt{6}}{7}$$

I na kraju, za zadate parametre sisitema $k=\frac{cR}{mg}=60,\ i_0^2=\frac{J_0}{M}=\frac{2}{5}R^2,\quad m=\frac{M}{m}=5,$ i odre|enu vrednost parametra s je $s=20+10\sqrt{6}$, tako da sistem koji ima dva stepena slobode kretawa , ima jednu sopstvenu kru`nu frekvenciju oscilovawa odre|ujemo istu:

$$w_2^2=\frac{g}{3R}u_2=\frac{g}{21R}\left(253+196\sqrt{6}\right).$$

Napomena: Ako student uradi samo za posebne brojeve ovaj zadatak dobija maksimalan broj poena 10(deset). Zadat je ura|en {ire nego {to se teskotom ispitnog zxadatka tra`i kao ogledni primer za studirawe.

Napomeana 2.

Promena potencijalne energije sistema pri izvo|ewu sistema iz nazna~ene konfiguracije ravnote`e je:

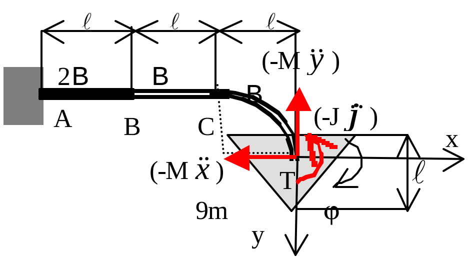
$$\mathbf{E_p}=3mgR(m+s)(1-\cos j)-smgx\sin 3j+cx^2$$

Sistem sem prikazanog na slici br. 2 polo`aja ravnote`e ima i duge polo`aje ravnote`e koji se odre|uju iz uslova da je prvi izvod potencijalne energije po generalisanim koordinatama jednak nuli, odakle se dobijaju slede}e jedna~ine:

$$x_n=\frac{s}{2k}R\sin 3q_n$$

$$4k\frac{m+s}{s^2}\sin q_n-\sin 6q_n=0$$ odnosno $$32\cos^5 q_n-32\cos^3 q_n+6\cos q_n-p=0$$ gde je uvedena oznaka $p=4k\frac{m+s}{s^2}$ i $n=1,2,3,4,...$ Vidimo da se radi o nelinearnom sistemu sa dva stepena slobode kretawa i kao takav ima ve}i broj polo`aja(i konfiguracija) ravnote`e, koji mogu biti stabilni ili nestabilni zavisno od definitnostri forme potencijalne energije u okolini odgovaraju}eg polo`aja. Zato je potrebno za svaki od tih polo`aja ravnote`e posebno ispitati stabilnost i samo u okolini stabilnih polo`aja ravnote`e su mogu}e male socilacije i dozvoqene su aproksimacije izraza za potencijalnu energiju , kao {to smo uradili za prethodno izu~eni slu~aj malih oscilacija.

3.zadatak

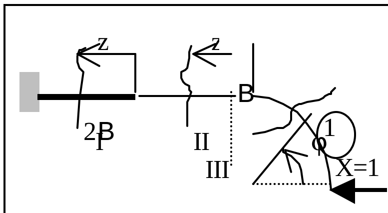
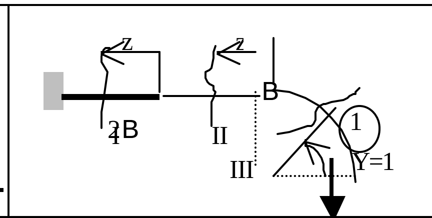
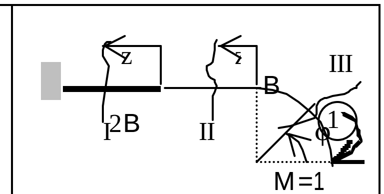


Slika br. 3

Kako je na slobodnom kraju lakog elasti~nog konzolnog nosa~a pri~vr{}eno plo~asto telo kona~nih dimenzija i kako ne mo`emo zanemariti wegov aksijalni moment inercije mase i uticaj na rotaciju, to se mora uzeti u ra~unicu i uticaj inercije obrtawa tog plo~astog tela, pa zakqu~ujemo da sistem na slici br. 3, ima 3 stepena slobode ravanskog kretawa, dve translacije i jednu rotaciju. Zato usvajamo tri generalisane koordinate i to dva pomerawa i jednu rotaciju u ravni nosa~a: x, y i ℓ φ.

Da bi smo sastavili diferencijalne jedna~ine oscilovawa tog tela, u obliku ravne plo~e, na lakom konzolnom nosa~u potrebno je da izra~unamo ta pomerawa i obrtawe; horizontalno x i vertikalno y i ugao φ obrtawa kao rezultuje}e dinami~ke deformacije nosa~a usled dejstva sila inercije (-M $\ddot{x}$) i (-M $\ddot{y}$) i sprega momenta (-J $\ddot{\varphi}$), a posredstvom uticajnih koeficijenata pomerawa u horizontalnom ili vertikalnom pravcu kraja nosa~a, kao i obrtawa tangente na elasti~nu liniju konzolnog nosa~a u preseku na slobodnom kraju usled dejstva vertikalne odnosno horizontalne sile ili sprega.

S obzirom da je nosa~ stati~ki odre|en i relativno jednostavan koristi}emo metodu deformacionog rada i direktnog integraqewa za dobijawe potrebnih uticajnih koeficijenata odnosno koristimo Maxwell-Mohr-ove obrasce. U tabeli je prikazan konzolni nosa~ u tri varijante optere}ewa: vertikalnom jedini~nom silom Y=1; horizontalnom jedini~nom silom X=1 i jedini~nim spregom M=1 sa nazna~enim koordinatama i presecima, dati su tako|e i momenti savijawa za nazna~ene slu~ajeve optere}ewa i odgovaraju}e delove rspona konzolnog nosa~a.

				
Presek I, *0<z<l,2B*	dz	$M_I^{x=1} = -l$	$M_I^{Y=1} = -(z+2l)$	$M_I^{F=1} = -1$
Presek II, *0<z<l,B*	dz	$M_{II}^{x=1} = -l$	$M_{II}^{Y=1} = -(z+l)$	$M_{II}^{F=1} = -1$
PresekIII, 0<φ<π/2,B	ldφ	$M_{III}^{x=1} = -l\sin\varphi$	$M_{III}^{Y=1} = -l(1-\cos\varphi)$	$M_{III}^{F=1} = -1$

Pomo}u ovih izraza i Maxwell-Mohr-ovih obrazaca sra~unavamo potrebne uticajne koeficijente:

α_{11}^{HH} -uticajni koeficijent pomerawa u horizontalnom pravcu preseka na slobodnom kraju konzolnog nosa~a usled dejstva horizontalne jedini~ne sile X=1 u preseku 1

$$\alpha_{11}^{HH} = \frac{1}{2B}\int_0^l l^2 dz + \frac{1}{B}\int_0^l l^2 dz + \frac{l^3}{B}\int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{l^3}{2B} + \frac{l^3}{2B}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{l^3}{2B} + \frac{l^3}{B} + \frac{\pi l^3}{4B}$$

$$\alpha_{11}^{HH} = \frac{l^3}{4B}(6+\pi) = p(6+\pi)$$

α_{11}^{HV} - uticajni koeficijent pomerawa u horizontaknom pravcu preseka na slobodnom kraju konzolnog nosa~a usled dejstva vertikalne jedini~ne sile Y=1 u preseku 1, koji je jednak uticajnom koeficijentu pomerawa u vertikalnom prevcu preseka slobodnog kraja konzolnog nosa~a usled dejstva horizontalne jedini~ne sile X=1 u preseku 1, a_{11}^{VH}, pa je:

$$a_{11}^{HV} = a_{11}^{VH} = \frac{l}{2B}\int_0^l (z+2l)dz + \frac{l}{B}\int_0^l (z+l)dz + \frac{l^3}{B}\int_0^{p/2} (1-\cos j)\sin j dj = \frac{5l^3}{4B} + \frac{3l^3}{2B} + \frac{l^3}{2B} = \frac{13l^3}{4B}$$

$$a_{11}^{HV} = a_{11}^{VH} = 13p$$

a_{11}^{VV} - uticajni koeficijent pomerawa u vertikalnom pravcu slobodnog kraja konzolnog nosa~a usled dejstva vertikalne jedini~ne sile Y=1 u preseku 1

$$a_{11}^{VV} = \frac{1}{2B}\int_0^l (z+2l)^2 dz + \frac{1}{B}\int_0^l (z+l)^2 dz + \frac{l^3}{B}\int_0^{p/2} (1-\cos j)^2 dj = \frac{l^3}{2B}\left(\frac{1}{3}+6\right) + \frac{l^3}{B}\left(\frac{1}{3}+2\right) + \frac{l^3}{B}\left(2+\frac{3p}{4}\right)$$

$$a_{11}^{VV} = \frac{l^3}{4B}(14+3p) = p(14+3p)$$

n_{11}^{V}- uticajni koeficijent obrtawa preseka (ili tangente na elasti~nu liniju u tom preseku) slobodnog kraja konzolnog nosa~a usled dejstva vertikalne jedini~ne sile Y=1 u preseku 1 i jednak je d_{11}^{V}uticajnom koeficijentu pomerawa u vertikalnom pravcu slobodnog kraja konzolnog nosa~a usled dejstva sprega jedini~nog momenta M=1 u preseku 1.

$$n_{11}^{V} = d_{11}^{V} = \sum \frac{1}{B}\int M^{Y=1}(z) M^{M=1}(z) dz = \frac{1}{2B}\int_0^l (z+2l)dz + \frac{1}{B}\int_0^l (z+l)dz + \frac{l^2}{B}\int_0^l (1-\cos j)dj = \frac{l^2}{4B}(7+2p)$$

$$n_{11}^{V} = d_{11}^{V} = \frac{p}{l}(7+2p)$$

g_{11}^{M} - uticajni koeficijent obrtawa preseka (ili tangente na elasti~nu liniju u tom preseku) slobodnog kraja konzolnog nosa~a usled dejstva sprega jedini~nog momenta M=1 u preseku 1.

$$g_{11}^{M} = \sum \frac{1}{B}\int \left[M^{M=1}(z)\right]^2 dz = \frac{1}{2B}\int_0^l (-1)^2 dz + \frac{1}{B}\int_0^l dz + \frac{l}{B}\int_0^l (-1)^2 dj = \frac{l}{2B}(3+p)$$

$$g_{11}^{M} = \frac{2p}{l^2}(3+p)$$

n_{11}^{H}- uticajni koeficijent obrtawa preseka (ili tangente na elasti~nu liniju u tom preseku) slobodnog kraja konzolnog nosa~a usled dejstva horizontalne jedini~ne sile X=1 u preseku 1 i jednak je d_{11}^{H} uticajnom koeficijentu pomerawa u horizontalnom pravcu slobodnog kraja konzolnog nosa~a usled dejstva sprega jedini~nog momenta M=1 u preseku 1.

$$n_{11}^{H} = d_{11}^{H} = \sum \frac{1}{B}\int M^{X=1}(z) M^{M=1}(z) dz = \frac{1}{2B}\int_0^l l dz + \frac{1}{B}\int_0^l l dz + \frac{l^2}{B}\int_0^l \sin j dj = \frac{5l^2}{2B}$$

$$n_{11}^{H} = d_{11}^{H} = \frac{10p}{l}.$$

Sada mo`emo za potrebne uticajne koeficijente pomerawa i obrtawa preseka na kraju konzole od vertikalnih i horizontalnih sila i spregova da napi{emo (uzimaju}i da je $p \approx 3$) slede}e:

$a_{11}^{HH} = p(6+p) \approx 9p$; $\quad a_{11}^{HV} = a_{11}^{VH} = 13p$; $\quad a_{11}^{VV} = p(14+3p) \approx 23p$;

$n_{11}^{V} = d_{11}^{V} = \frac{p}{l}(7+2p) \approx 13\frac{p}{\ell}$ $\quad n_{11}^{H} = d_{11}^{H} = \frac{10p}{l}$; $\quad g_{11}^{M} = \frac{2p}{l^2}(3+p) \approx 12\frac{p}{\ell^2}$

Sistem diferencijalnih jedna~ina oscilovawa je:

$$x = a_{11}^{HH}(-M\ddot{x}) + a_{11}^{HV}(-M\ddot{y}) + d_{11}^{H}(-J\ddot{j})$$

$$y = a_{11}^{HV}(-M\ddot{x}) + a_{11}^{VV}(-M\ddot{y}) + d_{11}^{V}(-J\ddot{j})$$

$$j = n_{11}^{H}(-M\ddot{x}) + n_{11}^{V}(-M\ddot{y}) + g_{11}^{V}(-J\ddot{j});$$

i za izra~unate vrednosti uticajnih koeficijenata uzimaju slede}i oblik:

$$x = p(6+p)(-9m\ddot{x})+13p(-9m\ddot{y})+10p(-ml\ddot{j})$$
$$y = 13p(-9m\ddot{x})+p(14+3p)(-9m\ddot{y})+p(7+2p)(-ml\ddot{j})$$
$$lj = 10p(-9m\ddot{x})+p(7+2p)(-9m\ddot{y})+p(3+p)(-ml\ddot{j})\ ;$$

Pretpostavimo re{ewa:

$$x = A_1\cos(wt+a);$$
$$y = A_2\cos(wt+a);$$
$$lj = A_3\cos(wt+a)$$

Uno{ewem predpostavqenih re{ewa i wihovih izvoda po vremenu u sistem diferencijalnih jedna~ina, deqewem tog sistema sa $\cos(\omega t+\alpha)$ i uzimaju}i u obzir pribli`nu vrednost $\pi=3$, kao i da smo uveli oznaku $u=pm\omega^2$ taj sistem diferencijalnih jedna~ina kretawa se svodi na sistem homogenih algebarskih jedna~ina po nepoznatim amplitudama oscilovawa oblika:

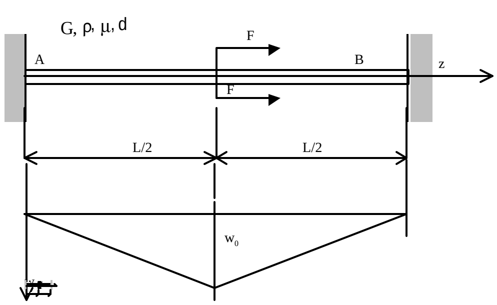
$$(1-81u)A_1-117uA_2-10uA_3=0$$
$$-117uA_1-(1-207u)A_2-13uA_3=0$$
$$-90uA_1-117uA_2-(1-12u)A_3=0\ ;$$

Iz uslova da taj sistem homogenih algebarskih jedna~ina ima re{ewa razli~ita od trivijalnih, {to povla~i za sobom uslov da je potrebno da determinanta tog sistema bude jednaka nuli, dobija se frekventna jedna~ina malih oscilacija plo~ice na slobodnom kraju lakog elasti~nog konzolnog nosa~a, a u ravni nosa~a:

$$f(u=pmw^2)=\begin{vmatrix}1-81u & -117u & -10u\\ -117u & 1+207u & -13u\\ -90u & -117u & 1-12u\end{vmatrix}=0$$

[to se zadatkom i tra`ilo.

Zadatak 4.



Slika br. 4

Najve}e uzdu`no pomerawe koje je ostvareno pod dejstvom sile u stawu stati~ke ravnote`e vratila pod dejstvom uzdu`ne sile $F$ na sredini vratila je: $w_0 = \dfrac{Fl}{4EA}$ i u preseku na sredini du`ine vratila-{tapa. Do ove vrednosti smo do{li razdvajawem obostrano-ukle{tenog {tapa-vratila na dva konzolno ukle{tena vratila raspona po $\ell/2$, pri ~emu je jedna konzola optere}ena aksijalnom silom $F/2$ na istezanje a druga na pritisak silom istog intenziteta, a pri tome na osnovu uslova kompatibilnosti pomerawa wihova uzdu`na pomerawa slobodnih krajeva treba da budu ista.

Zakon promene uzdu`nog pomerawa za ovako obostrano ukle{ten vratilo-{tap prikazan je na slici br. 4, a oblika je:

$$w = w_0(z,o) = f(z) = \begin{cases} 2\dfrac{w_0}{l}z; & 0\le z\le \dfrac{l}{2}\\ -2\dfrac{w_0}{l}(l-z); & \dfrac{l}{2}\le z\le l\end{cases}$$

Parcijalna diferencijalna jedna~ina longitudunalnih oscilacija homogenog {tapa je:

$$\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}, \qquad c^2 = \frac{E}{r}, \tag{1}$$

gde je $w(z,t)$ uzdu`no pomerawe du` ose z {tapa. Re{ewe prethodne parcijalne diferencijalne jedna~ine uzdu`nih(longitudinalnih) oscilacija vratila-{tapa predpostavqamo u obliku:

$$w(z,t)=\sum_{n=1}^{n=\infty} \sin\left(\frac{np}{l}z\right)[A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t], \quad \text{u kome je } w_n = \frac{np}{\ell}\sqrt{\frac{E}{r}} = \frac{np}{\ell}\sqrt{\frac{2(1+m)G}{r}}$$

gde je $Z_n(z) = \sin\left(\frac{np}{l}z\right)$ sopstvena, ortogonalna funkcija za obostrano ukle{ten {tap. Po~etni uslovi su zadati u obliku:

$$\frac{\partial w}{\partial t}(z,0)=\omega_0 w_0 \sin\frac{3pz}{l}\cos^3\left(\frac{3pz}{l}\right); \quad \omega_0=\frac{p}{l}\sqrt{\frac{E}{r}}; \; w_0 = \frac{p}{\ell}\sqrt{\frac{E}{r}} = \frac{p}{\ell}\sqrt{\frac{2(1+m)G}{r}} \quad \text{gde je } G = \frac{E}{2(1+m)}$$

$$w = w_0(z,o) = f(z) = \begin{cases} 2\dfrac{w_0}{l}z; & 0 \le z \le \dfrac{l}{2} \\ -2\dfrac{w_0}{l}(l-z); & \dfrac{l}{2} \le z \le l \end{cases}$$

Za t=0 sledi:

$$w(z,0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{np}{l}z=f(z)$$

$$\dot{w}(z,0)=\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin\frac{np}{l}z=\omega_0 w_0 \sin\left(\frac{3pz}{l}\right)\cos^3\left(\frac{3pz}{l}\right), \text{ pa je:}$$

$$A_n=\frac{\int_0^l f(z)\sin\frac{np}{l}zdz}{\int_0^l \sin^2\frac{np}{l}zdz} = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{2w_0}{l}z\sin\frac{np}{l}zdz - \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{2w_0}{l}(l-z)\sin\frac{np}{l}zdz\right] = \frac{8w_0}{n^2p^2}\sin\frac{np}{2},$$

pa sledi da je:

$$A_{2n}=0 \qquad \text{i} \qquad A_{2n-1}=\frac{8(-1)^{n+1}w_0}{(2n-1)^2p^2}.$$

(Napomena: Za sra~unavawe prethodnih integrala vidi Teorija oscilacija D. Ra{kovi}, strana 337, primer transverzalne oscilacije `ice kao matemati~ki analogan zadatak.)

Zakon po~etne ugaone brzine, trigonometrijskim identitetima, transformi{imo na slede}i na~in:

$$\sin\left(\frac{3pz}{l}\right)\cos^3\left(\frac{3pz}{l}\right)=\sin\frac{3pz}{l}\cos\frac{3pz}{l}\left(1-\sin^2\frac{3pz}{l}\right)=\sin\frac{3pz}{l}\cos\frac{3pz}{l}-\sin^3\frac{3pz}{l}\cos\frac{3pz}{l}=$$

$$\frac{1}{2}\sin\frac{6pz}{l}-\frac{3}{4}\sin\frac{3pz}{l}\cos\frac{3pz}{l}+\frac{1}{4}\sin\frac{3pz}{l}\cos\frac{3pz}{l}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sin\frac{6pz}{l}-\frac{3}{8}\sin\frac{6pz}{l}+\frac{1}{8}\sin\frac{12pz}{l}+\frac{1}{8}\sin\frac{6pz}{l}=\frac{1}{4}\sin\frac{6pz}{l}+\frac{1}{8}\sin\frac{12pz}{l}.$$

Metodom jednakih koeficijenata sada mo`emo odraditi koeficijente B_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n B_n \sin\frac{npz}{l}=\omega_0 w_0\left[\frac{1}{4}\sin\frac{npz}{l}+\frac{1}{8}\sin\frac{12pz}{l}\right]=\frac{1}{8}w_0 w_0\left[2\sin\frac{6pz}{l}+\sin\frac{12pz}{l}\right]\Rightarrow$$

$$w_6 = 6w_0, \quad w_{12} = 12w_0$$

Vidimo da su svi koeficijenti V_n jednaki nuli osim:

$$B_6=\frac{w_0}{24}; \qquad B_{12}=\frac{w_0}{96}.$$

Sada zakon oscilovawa ima oblik:

$$w(z,t)=\frac{p}{32l}\sqrt{\frac{E}{r}}\,\frac{Fl}{EA}\,[2\,\frac{1}{w_6}\sin\frac{6pz}{l}\,\sin\omega_6 t+\frac{1}{w_{12}}\sin\frac{12pz}{l}\,\sin\omega_{12}t]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Fl}{EA}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2p^2}\cos\omega_{2n-1}t\sin\frac{(2n-1)p}{l}z\ .$$

Kona~no, zakon uzdu`nih (longitudinalnih) oscilacija za zadate po~etne uslove mo`emo napisati u obliku superpozicije vi{e sopstvenih harmonika (oblika) oscilovawa:

$$w(z,t)=\frac{Fl}{384EA}\left[4\sin\frac{6pz}{l}\sin\frac{6p}{l}t\sqrt{\frac{E}{r}}+\sin\frac{12pz}{l}\sin\frac{12p}{l}t\sqrt{\frac{E}{r}}\right]+\frac{2Fl}{p^2EA}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)pz}{l}\sin\frac{(2n-1)p}{l}t\sqrt{\frac{E}{r}}$$