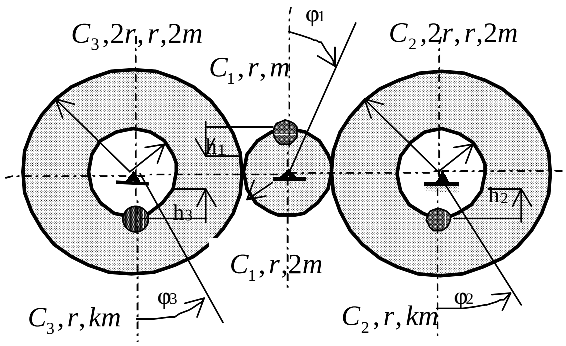
ELASTODINAMIKA

Re{ewa zadataka iz decembarskog ispitnog roka 2000

PRVI ZADATAK:



Slika br. 1. a*

Konfiguraciju sistema u proizvoqnom trenutku vremena i dinamike definisanog mehani~kog sistema, mo`emo odrediti pomo}u tri koordinate - tri ugla $\dot{\varphi}_1, \overset{*}{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$. koje merimo od odgovaraju}ih referentih fiksiranih, vertikalnih prava, kroz centre dikskova, kako je to nazna~eno na slici, a kojima odre|ujemo uglove obrtawa diskova pri rotaciji.

Kako su diskovi spregnuti, to sistem ima jedan setepen slobode kretawa, iako je potrebno da znamo tri koordinate-tri ugla da bi se u svakom trenutku kretawa sistema definisala konfijugacija posmatranog mehani~kog sistema. Zato je potrebno da izaberemo jednu generalisanu koordinatu sistema. To mo`emo uraditi na vi{e na~ina, naprimer biraju}i jednu od koordinata sistema za generalisanu koordinatu. Sada se opredelimo da za genereal isanu koordinatu usvajimo ugao φ_1 , a iz uslova da su brzine ta~aka dodira dva diska jednake dobijamo veze iz kojih odre|ujemo veze koordinata sistema sa generalisanom koordinatom. Na osnovu toga te veze izme|u koordinata sistema i izabrane generalisane koordinate su:

$$\overset{*}{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1 .$$

Povr{ina A i gustina ρ materijala obru~a su:

$$A = 4r^2\pi - r^2\pi = 3r^2\pi ;$$

$$M = 2m = \rho A = 3\rho r^2\pi \Rightarrow \rho = \frac{2m}{3r^2\pi} .$$

Aksijalni momenti inercije masa obru~a za ose kroz centare C_2 i C_3 su:

$$J_{C3} = J_{C2} = \rho\left(\frac{(2r)^2\pi}{2} - \frac{r^4\pi}{2}\right) = 5mr^2$$, a aksijalni moment inercije mase diska za osu kroz cenar C_1 je:

$$J_{C1} = \frac{2mr^2}{2} = mr^2 .$$

Kineti~ka energija sistema je jednaka zbiru kineti~kih energija rotacija diskova oko svojih osa rotacije, tj. poluproizvoda aksijalnih momenata inercije obrtnih masa i kvadrata odgovaraju}e ugaone brzine rotacije oko ose. Tada da sada izraz za dvostruku kineti~ku energiju dinamike sistema pi{emo u obliku:

$$2E_k = J_{C1}\dot{\varphi}_1^2 + J_{C2}\dot{\varphi}_2^2 + J_{C3}\dot{\varphi}_3^2 + km\left(r\dot{\varphi}_3\right)^2 + km\left(r\dot{\varphi}_2\right)^2 + m\left(r\dot{\varphi}_1\right)^2 ;$$

$$2E_k = mr^2\dot{\varphi}_1^2 + 2\circ 5mr^2\frac{\dot{\varphi}_1^2}{4} + kmr^2\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} + mr^2\dot{\varphi}_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad 2E_k = \frac{mr^2}{2}(9+k)\dot{\varphi}_1^2 .$$

Promena potencijalne enrgije sistema je rezultat spu{tawa te{kih materijalnih ta~aka u poqu zemqine te`e, za $h_1, h_2, h_3$, redom, pri rotaciji diskova na kojima su nasa|ene, te na osnovu toga mo`emo da napi{emo da je:

$E_p = kmgh_1 + kmgh_2 - mgh_3$;

Na osnovu toga pri izvo|ewu sistema iz polo`aja, koji je nazna~en na slici, rotacijom diskova za odgovaraju}i ugao $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$ za izraza za promenu potencijalne energije u funkciji genaralisane koordinate φ_1 dobijamo slede}e:

$$E_p = kmgr(1-\cos\varphi_3) + kmgr(1-\cos\varphi_2) - mgr(1-\cos\varphi_1) = 2kmgr\left(1-\cos\frac{1}{2}\varphi_1\right) - mgr(1-\cos\varphi_1):$$

$$E_p = mgr\left\{2k\left(1-\cos\frac{1}{2}\varphi_1\right) - (1-\cos\varphi_1)\right\}:$$

Ako uvedemo pretpostavku da su obrtawa mala, to zna~i da je generalisana koordinata φ_1 mala, da je nazna~ens konfiguracija sistema za $\varphi_1 = 0$, odnosno $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$, stabilan polo`aj ravnote`e sistema, te zato mo`emo linearizovati sistem i izraz za potencijalnu napisati kao kvadratnu formu generalisane koordinate φ_1, u obliku:

$$E_p \approx mgr\left\{2k\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi_1\right)^2 - \frac{1}{2}\varphi_1^2\right\} \Rightarrow \qquad E_p \approx \frac{mgr}{2}(k-2)\varphi_1^2 \quad \Rightarrow \quad k>2.$$

Lagrange-ova jedna~ina druge vrste za generalisanu koordinatu φ_1 je:

$$\frac{mr^2}{2}(9+k)\ddot{\varphi}_1 + \frac{mgr}{2}(k-2)\varphi_1 = 0, \quad \text{pa po{to je} \quad \ddot{\varphi}_1 + \omega^2\varphi_1 = 0 \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g(k-2)}{r(9+k)} \text{ za } k>2.$$

Dobijeni izraz $\omega^2 = \dfrac{g(k-2)}{r(9+k)}$ je kvadrat kru`ne frekvencije malih oscilacija sistema oko polo`aja stabilne ravnote`e nazna~ene na slici kada je $\varphi_1 = 0$ i $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$, i va`i za k>2.

U op{tem slu~aju kada ne prou~avamo male oscilacije oko, na slici nazna~enog polo`aja ravnote`e za $\varphi_1 = 0$ i $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$, nego nas interesuje nelinearna dinamika sistema bez obzira da li su koordinate mali ili veliki uglovi, i kada nas interesuje da li postoje jo{ neki polo`aji ravnote`e sistema i da li su oni stabilni ili nestabilni potrebno je da ispitamo ekstremne vrednosti funkcije $E_p(\varphi_1)$. Zato potra`imo wene izvode po generalisanoj koordinati φ_1, prvi i drugi, i odredimo nule i znak tih izvoda. Radi toga prvi izvod potencijalne energije $E_p(\varphi_1)$ po generalisanoj koordinati φ_1 i izjedna~imo ga sa nulom, tako da dobijamo u slede}e:

$$\frac{dE_p}{d\varphi_1} = mgr\left(2k\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2} - \sin\varphi_1\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin\frac{\varphi_1}{2} = 0 \Rightarrow \quad \varphi_{01} = 2n\pi; \quad n = 0,1,2,3\ldots$$

$$k\sin\frac{\varphi_1}{2} - 2\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2} = 0$$

$$\varphi_{01} = \pm 2\arccos\frac{k}{2} + 4n\pi \quad \text{za} \quad k<2;$$

Sada je: $\varphi_{01} = \pm 2\arccos\frac{k}{2} + 4n\pi$ za k<2; i tada je $\varphi_{03} = \varphi_{02} = \pm\arccos\frac{k}{2} + n\pi$ za k<2.

Vidimo da smo dobili dva niza re{ewa - nula prvog izvoda potencijalne enegije po generalisanoj koordinati. Iz tih matemati~kih re{ewa zakqu~ujemo da postoji vi{e konfiguracija posmatranog mehani~kog sistema koji su polo`aji ravnote`e sistema. Prvi niz re{ewa uvek postoji bez obzira da li je mawe ili ve}e od 2, odnosni i kada je k<2, i kada je k>2. Drugi niz re{ewa postoji samo kada je k<2. To zna~i da postoje razli~iti polo`aji ravnote`e posmatranog sistema kada je k<2 , odnosno kada je k>2. Daqe je potrebno ispitati karater tih polo`aja ravnote`e.

Drugi izvodi potencijalne energije po generalisanoj koordinati u odgovaraju}im polo`ajima ravnote`e su:

$$\frac{d^2E_p}{d\varphi^2_1} = mgr\left(k\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2} - \cos\varphi_1\right) = 0,$$

pa je

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\varphi^2_1}\right|_{\substack{\varphi_1 = 2n\pi \\ k>2}} = mgr\left(k\frac{1}{2}(-1)^n - 1\right);$$

Za k>2

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\varphi^2_1}\right|_{\substack{\varphi_1 = 4p\pi \\ k>2}} > 0, \quad \text{za} \quad p = 0,1,2,3,4,5,\ldots$$

i to odgovara polo`ajima stabilne ravnote`e jer je E_{pmin} tj. u tom polo`aju ravnote`e potencijalna energija je u minimumu. Oko tog polo`aja ravnote`e mogu}e su male oscilacije i korektno je vr{iti linearizaciju diferencijalnih jedna~ina, odnosno u izrazima za potencijalnu energiju zadr`ati samo ~lanove - kvadratne po generalisanoj koordinati.

Za k>2.

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\varphi^2_1}\right|_{\substack{\varphi_1 = 2(2p+1)\pi \\ k>2}} < 0, \quad \text{za} \quad p = 0,1,2,3,4,5,\ldots$$

i to odgovara polo`ajima nestabilne ravnote`e jer je E_{pmax} , tj. u tom polo`aju ravnote`e je potencijalna energija je u maksimumu. Oko tog polo`aja ravnote`e nisu mogu}e male oscilacije i nije korektno je vr{iti linearizaciju diferencijalnih jedna~ina, odnosno u izrazima za potencijalnu energiju zadr`ati samo ~lanove - kvadratne po generalisanoj koordinati. Ako se uvede linearizacija dobijaju se linearizovane diferencijalne jedna~ine koje ne opisuju korektno karakter kretawa sistema oko tog polo`aja nestabilne ravnote`e.

Za k<2 je:

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\varphi^2{}_1}\right|_{\substack{\varphi_1=2n\pi\\ k<2}}<0,\quad n=0,1,2,3,4,5,.....$$

i to zna~i da za ceo niz nula se javqaju polo`aji ravnote`e koji su nestabilni, jer je E_{pmax} , tj. u tim polo`ajima ravnote`e potencijalna energija je u maksimumu. Oko ni jednog od tih polo`aja ravnote`e nisu mogu}e male oscilacije i nije korektno vr{iti linearizaciju diferencijalnih jedna~ina, odnosno u izrazima za potencijalnu energiju zadr`ati samo ~lanove - kvadratne po generalisanoj koordinati. Ako se uvede linearizacija dobijaju se linearizovane diferencijalne jedna~ine, koje ne opisuju korektno karakter kretawa sistema oko tog polo`aja nestabilne ravnote`e.

Za k<2 je:

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\varphi^2{}_1}\right|_{\substack{\varphi_1=\pm 2\arccos\frac{k}{2}+4n\pi\\ k<2}}>0,\qquad n=0,1,2,3,4,5,.....$$

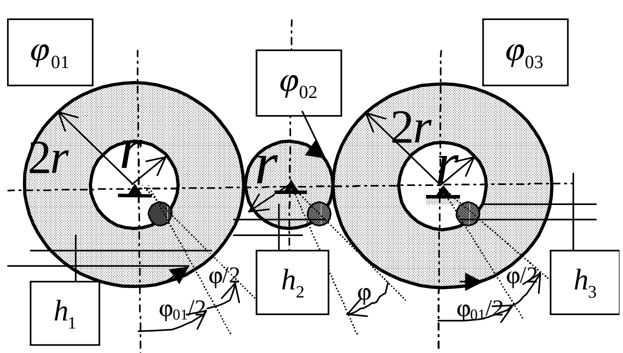
i to odgovara polo`ajima stabilne ravnote`e jer je E_{pmin} tj. u takvom polo`aju ravnote`e potencijalna energija je u minimumu. Oko tog polo`aja ravnote`e mogu}e su male oscilacije i korektno je vr{iti linearizaciju diferencijalnih jedna~ina, odnosno u izrazima za potencijalnu energiju zadr`ati samo ~lanove - kvadratne po generalisanoj koordinati.

Sada razmotrimo slu~aj malih oscilacija oko tih stabilnih polo`aja ravnote`e definisanih pomo}u uglova:

$$\varphi_{01}=\pm 2\arccos\frac{k}{2}+4n\pi\quad,\qquad \varphi_{03}=\varphi_{02}=\pm\arccos\frac{k}{2}+n\pi\quad \text{za}\quad k<2.$$

$$n=0,1,2,3,4,5,.....$$

Za generalisanu koordinatu sistema sada izaberimo ugao φ zaokretawa sredweg zup~anika mereno od nazna~enog polo`aja ravnote`e, kao {to je to na slici prikazano. Pri zaokretawu sredweg zup~anika za ugao φ od ravnote`nog polo`aja materijalne ta~ke se spu{taju za visine h_1, h_2, h_3, redom i wihove ta~ne i aproksimativne vrednosti odre|ujemo u obliku:



Slika br. 1. b*

$$h_1=r\left[\cos\varphi_{01}-\cos(\varphi_{01}+\varphi)\right]=$$
$$=r\left[\cos\varphi_{01}(1-\cos\varphi)-\sin\varphi_{10}\sin\varphi\right]$$
$$h_1\approx r\left[\cos\varphi_{01}\frac{\varphi^2}{2}-\sin\varphi_{01}\varphi\right]$$
$$h_3=h_2=r\left[\cos\frac{\varphi_{01}}{2}-\cos\left(\frac{\varphi_{01}}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]=$$
$$=r\left[\cos\frac{\varphi_{01}}{2}\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)-\sin\frac{\varphi_{01}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right]$$

$$h_3 = h_2 \approx r\left[\cos\frac{\varphi_{01}}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_{01}}{2}\right],$$

Izraz za potencijalnu energiju:

$$E_p = -mgh_1 + 2kmgh_2 \Rightarrow$$

$$2E_p \approx mgr\left(\frac{k}{2}\cos\frac{\varphi_{01}}{2} - \cos\varphi_{10}\right)\varphi^2 + 2\varphi mgr\left(\sin\varphi_{01} - k\sin\frac{\varphi_{01}}{2}\right)$$

drugi sabirak ovog izraza je jednak nuli, jer je: $\left(\sin\varphi_{01} - k\sin\frac{\varphi_{01}}{2}\right) = 0$.

To sada mo`emo i dokazati: $\left(\sin\varphi_{01} - k\sin\frac{\varphi_{01}}{2}\right) = \sin\frac{\varphi_{01}}{2}\left(2\cos\frac{\varphi_{01}}{2} - k\right) = \sin\frac{\varphi_{01}}{2}\left(2\frac{k}{2} - k\right) \equiv 0$.

Sada je izraz za pribli`nu vrednost potencijalne energije u okolini posmatranoh polo`aja ravnote`e i za male oscilacije, male vrednosti generalisane koordinate φ u obliku:

$$2E_p \approx mgr\left(\frac{k}{2}\cos\frac{\varphi_{01}}{2} - \cos\varphi_{01}\right)\varphi^2,$$

Kako je:

$\frac{k}{2}\cos\frac{\varphi_{01}}{2} - \cos\varphi_{01} = \frac{k}{2}\cos\frac{\varphi_{01}}{2} - 2\cos^2\frac{\varphi_{01}}{2} + 1 = \frac{k}{2}\frac{k}{2} - \frac{k^2}{2} + 1 = 1 - \frac{k^2}{4}$, sledi da je izraz za potencijalnu energiju:

$$2E_p \approx mgr\left(1 - \frac{k^2}{4}\right)\varphi^2$$

i sledi da je zadovoqen uslov $\Rightarrow 4 - k^2 > 0 \Rightarrow \quad k < 2 \quad i \quad k \in (0,2)$.

Lagrange-ova jedna~ina druge vrste za generalisanu koordinatu φ je:

$$\frac{mr^2}{2}(9+k)\ddot{\varphi} + \frac{mgr}{4}\left(4 - k^2\right)\varphi = 0,$$

po{to je

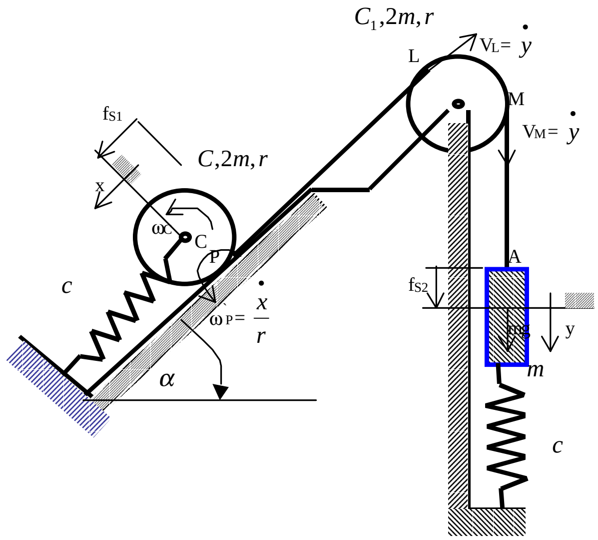
$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \Rightarrow \qquad \omega^2 = \frac{g\left(4 - k^2\right)}{2r(9+k)}, \quad k < 2.$$

Zakqu~ujemo da je dobijeni izraz $\omega^2 = \frac{g\left(4 - k^2\right)}{2r(9+k)}, \quad k < 2$ kvadrat kru`ne frekvencije malih oscilacija sistema oko polo`aja stabilne ravnote`e nazna~ene na slici

$\varphi_{01} = \pm 2\arccos\frac{k}{2} + 4n\pi$, $\varphi_{03} = \varphi_{02} = \pm\arccos\frac{k}{2} + n\pi$, $n = 0,1,2,3,4,5,\ldots..$

i va`i za k<2.

DRUGI ZADATAK:



Slika br. 2. a*

Sistem ima dva stepena slobode kretawa, i za generalisane koordinate usvajamo koordinate x i y koje se mere od nepokretnih ta~aka S_0 i A_0, koje se u konfiguracji prikazanoj na slici poklapaju sa ta~kama S i A, koje su vezane za teg mase M i centar diska. Zato su brzine ta~aka A i S:

$$v_A = \dot{y}, \quad v_C = \dot{x},$$

pa je ugaona brzina diska sa centrom S_1:

$$\omega_{C1} = \frac{v_M}{r} = \frac{\dot{y}}{r},$$

a wegov aksijalni moment inercije mase za osu kroz centar: $J_{C1} = mr^2$.

Aksijalni moment inercije mase diska sa centrom u S, a za osu kroz centar je:

$$J_C = \frac{1}{2} 2mr^2 = mr^2 .$$

Ugaona brzina obrtawa diska sa centrom u S ima dve komponente ugaone brzine jednu usled kotrqawa bez klizawa ω_C', a drugu usled klizawa niti koja je oko wega obmotana i wenog odmotavawa ω_C''. Te komponente su:

$$\omega_C^{`} = \frac{v_C}{r} = \frac{\dot{x}}{r} \quad (\curvearrowleft), \qquad \omega_C^{``} = \frac{v_L}{r} = \frac{\dot{y}}{r} \quad (\curvearrowleft),$$

Ugaona brzina ω_C obrtawa diska sa centrom u S je jednaka zbiru tih komponentnih ugaonih obrina, pa je: $\omega_C = \omega_C^{`} + \omega_C^{``}$, i na osnovu toga sledi da je sledi da je :

$$\omega_C = \frac{\dot{x} + \dot{y}}{r}.$$

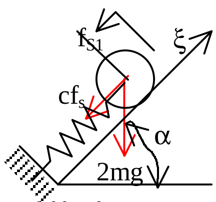
Kineti~ka energija sistema je jednaka zbiru kineti~kih energija: rotacije diska sa centrom u C_1 ugaonom brzinom ω_{C_1}, translacije diska sa centrom u C brzinom translacije v_C i wegove rotacije oko ose kroz centar masa ugaonom brzinom ω_C i translacije tega translatornom brzinom v_A. Na snovu toga pi{emo da je:

$$2E_k = J_C \omega_C^2 + J_{C1} \omega_{C1}^2 + 2m v_C^2 + m v_A^2;$$

$$2E_k = mr^2 \left(\frac{\dot{x} + \dot{y}}{r} \right)^2 + 2mr^2 \left(\frac{\dot{y}}{r} \right)^2 + 2m \dot{x}^2 + m \dot{y}^2;$$

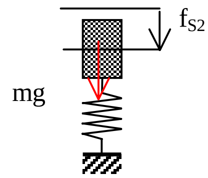
$$2E_k = m \left[3\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + 3\dot{y}^2 \right].$$

Iz uslova ravnote`e odre|ujemo stati~ke ugibe opruga sistema, tako da se dobijaju slede}i odnosi:



Slika br. 2. b*

$$\sum F_\xi = 0$$
$$2mg\sin\alpha = cf_{S1}$$
$$f_{S1} = \frac{2mg}{c}\sin\alpha$$



Slika br. 2. c*

$$\sum Y_i = 0$$
$$mg = cf_{S1}$$
$$f_{S2} = \frac{mg}{c}$$

Predpostavka je da je u konfiguraciji ravnote`e u`e nenapregnuto.

Promena potencijalne energije sistema usled izlaska sistema iz ravnote`ne konfiguracije je rezultat prira{taja deformacionog rada na dodatnim deformacijama skra}ewa opruga za $x$ odnosnu $y$ u odnosu na wihove deformacije u odnosu na konfiguraciju ravnote`e, kada su sabijene za stati~ke ugibe f_{s1} i f_{s2} za , kao i opadawa usled spu{tawa centra masa, odnosno napadnih ta~aka sila te`ine diska za $x\sin\alpha$ i tega za y , tako da je:

$$E_p = \frac{1}{2}c\left(f_{S1}+x\right)^2 - \frac{1}{2}cf_{S1}^2 + \frac{1}{2}c\left(f_{S2}+y\right)^2 - \frac{1}{2}cf_{S2}^2 - mgy - 2mgx\sin\alpha \ ;$$

$$2E_p = c\left(x^2+y^2\right).$$

Inerciona i kvazielasti~na matrica sada imaju oblik:

$$\mathbf{A} = m\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = m\overline{\mathbf{A}}; \qquad \mathbf{C} = c\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} = c\overline{\mathbf{C}}.$$

Lagrange-eove jedna~ine druge vrste za generalisane koordinate x i y, u matri~nom obliku su:

$$\mathbf{A}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \mathbf{C}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 0 / \div m;$$

$$\overline{\mathbf{A}}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \omega_0^2\overline{\mathbf{C}}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$ gde je uvedena oznaka $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$

Pretpostavimo re{ewe:
$$\begin{array}{ll} x = A_1\cos(\omega t+\beta); & \ddot{\theta} = -\omega^2 A_1 x \\ y = A_2\cos(\omega t+\beta); & \ddot{x} = -\omega^2 A_2 y \end{array};$$

pa iz sisitema Lagrange- ovih jedna~ina dobijamo sisitem homogenih algebarskih jedna~ina po nepoznatim amplitudama A_1 i A_2, koje se u matri~nom obliku mogu napisati kao:

$$\left(-\omega^2\overline{\mathbf{A}} + \omega_0^2\overline{\mathbf{C}}\right)\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = 0 \ .$$

Frekventna jedna~ina se dobija iz uslova da je determinanta sistema homogenih algebarskih jedna~ina jednaka nuli, na osnovu ~ega sledi:

$$\Delta\left(\omega^2\right) = \left|\omega_0^2\overline{\mathbf{C}} - \omega^2\overline{\mathbf{A}}\right| = \begin{vmatrix} \omega_0^2 - 3\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega_0^2 - 3\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\omega_0^2 - 3\omega^2\right)^2 - \omega^4 = 0 \Rightarrow$$

kao i da su sopstvene kru`ne frekvencije:

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0\sqrt{2}}{2}.$$

Odnosi amplituda oscilovawa su:

$$\frac{A_1^{(S)}}{\mathrm{K}_{21}^{s}} = \frac{A_2^{(S)}}{\mathrm{K}_{22}^{s}} = C_S$$

gde su $\mathrm{K}_{21}^{(s)}, \mathrm{K}_{22}^{(s)}, s = 1,2;$ odgovaraju}i kofaktori za sopstvene vrednosti sistema. Na osnovu toga pi{emo:

$$\frac{A_1^{(S)}}{\omega_S^2} = \frac{A_2^{(S)}}{\omega_0^2 - 3\omega_S^2} = C_S;$$

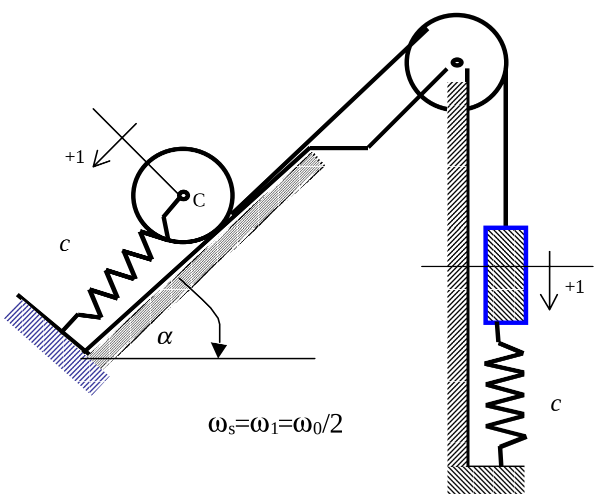
odnosno za prvu i drugu sopstvenu vrednost je:

$$\frac{A_1^{(1)}}{\frac{\omega_0^2}{4}} = \frac{A_2^{(1)}}{\frac{\omega_0^2}{4}} = C_1^*, \quad \text{i} \quad \frac{A_1^{(2)}}{\frac{\omega_0^2}{2}} = \frac{A_2^{(2)}}{-\frac{\omega_0^2}{2}} = C_2^*$$

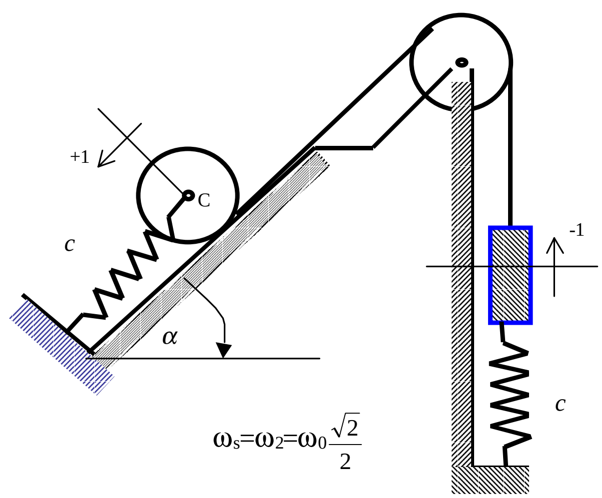
Skra}ivawem se mo`e dobiti i slede}i odnos amplituda oscilovawa:

$$\frac{A_1^{(1)}}{1} = \frac{A_2^{(1)}}{1} = C_1^*, \quad \text{i} \quad \frac{A_1^{(2)}}{1} = \frac{A_2^{(2)}}{-1} = C_2^*$$

Prikaz oblika oscilovawa pomo}u nazna~enih pomerawa elemenata sistema:

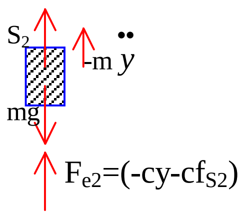


Slika br. 2. **d***



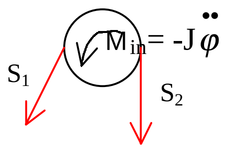
Slika br. 2. **e***

Sile u konopima (u`adima) odre|ujemo na osnovu **D'Alambert-ove teoreme**, odnosno na osnovu uslova ravnote`e aktivnih, reaktivnih sila i sila inercije koje dejstvuju na pojedine elemente sistema, diskove odnosno teg. *Koristimo jedna~ine dinami~ke ravnote`e sila i momenata.* Na osnovu toga pi{emo:



$$\sum Y_i = 0, \Rightarrow \quad -S_2 - m\ddot{y} + mg + \left(-cy - cf_{S2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$S_2 = -cy - m\ddot{y}$$

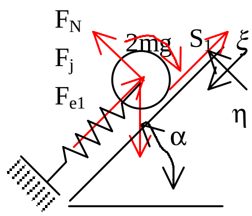


$$\sum M_i = 0, \Rightarrow \quad -S_1 + S_2 r + \left(-J_{C1}\frac{\ddot{y}}{r}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$S_1 = S_2 - m\ddot{y}$$

Provera intenziteta sile u konopu:

$M_{Ci} = -J_c\dot{\omega}_C$



$F_{e1} = -cx - cf_{S1}$

$cf_{S1} = \dfrac{2mg}{c}\sin\alpha$

$F_j = -2m\ddot{x}$

$$\sum F_{\xi i} = 0 \Rightarrow -S_1 - cx - cf_{S1} + 2mg\sin\alpha + (-2m\ddot{x}) = 0,$$

$$\sum F_{\eta i} = 0 \Rightarrow -F_N - 2mg\cos\alpha = 0, \Rightarrow F_N = 2mg\cos\alpha$$

$\sum M_C = 0 \Rightarrow \left(-J_C\dot{\omega}_C\right) + S_1 r = 0$, gde su: $\omega_C = \dfrac{\dot{x}+\dot{y}}{r}$, $J_C = mr^2$

$$-S_1 - cx - 2m\ddot{x} = 0$$

$-m\left(\ddot{x}+\ddot{y}\right) + S_1 = 0$, kako je $S_1 = -cy - 2m\ddot{y}$

dobija se sisitem jedna~ina:

$$-cy - 2m\ddot{y} - cx - 2m\ddot{x} = 0$$

$$-m\ddot{x} - m\ddot{y} - cy - 2m\ddot{y} = 0,$$

odakle se posle deqewa sa m i uvo|ewa smene za ω_0 dobija sisitem

$$\ddot{x} + 3\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$3\ddot{x} + \ddot{y} + \omega_0^2 x = 0.$$

Glavne koordinate sistema su:

$$\xi_1 = C_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1); \quad \ddot{\xi}_1 = -\omega_1^2\xi_1 = -\frac{c}{4m}\xi_1$$

$$\xi_2 = C_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2); \quad \ddot{\xi}_2 = -\omega_2^2\xi_2 = -\frac{c}{2m}\xi_2$$

Kako su amplitude za odgovaraju}e sopstvene vrednosti sistema:

$$A_1^{(1)} = C_1, \qquad A_1^2 = C_2$$

$$A_2^{(1)} = C_1, \qquad A_2^{(2)} = -C_2;$$

to su *generalisane koordinate sistema* izra`ene pomo}u glavnih koordinata sistema:

$$x = C_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) = \xi_1 + \xi_2;$$

$$y = C_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) - C_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) = \xi_1 - \xi_2.$$

Sile u konopima izra`ene preko glavnih koordinata onda su:

$$S_1 = -cy - 2m\ddot{y} = -c(\xi_1 + \xi_2) - 2m(\ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_2) \Rightarrow$$

$$S_1 = -\frac{c}{2}\xi_1 \quad \text{i}$$

$$S_2 = -cy - m\ddot{y} = -c(\xi_1 + \xi_2) - m(\ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_2) \Rightarrow$$

$$S_2 = \frac{c}{4}(-3\xi_1 + 2\xi_2)$$

Normalne koordinate sistema su:
$$\eta_1 = \overline{C_1}\cos(\omega_1 t + \alpha_1);$$
$$\eta_2 = \overline{C_2}\cos(\omega_2 t + \alpha_2);$$

Modalna matrica sistema je: $\mathbf{R} = \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

jer su sopstveni amplitudni vektori sistema:

$$\{r_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{i} \quad \{r_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

Normalne amplitudne vektore sistema odre|ujemo pomo}u glavnih amplitudnih vektora wihovim normirawem pomo}i inercijske matric. Na osnovu toga pretpostavqamo da su normalni amplitudni vektori:

$$\{v_1\} = \overline{C_1^*}\{r_1\} = \overline{C_1^*}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{C_1^*} \\ \overline{C_1^*} \end{Bmatrix} \quad \text{i} \quad \{v_2\} = \overline{C_2^*}\{r_2\} = \overline{C_2^*}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{C_2^*} \\ -\overline{C_2^*} \end{Bmatrix}.$$

u kojima su konstante $\overline{C_1^*}$ i $\overline{C_2^*}$ nepoznate i *normirawem glavnih sopstvenih vektora* dobijemo wihove vrednosti na slede}i na~in:

$$(v_1)\mathbf{A}\{v_1\} = 1;$$

$$\overline{C_1^\bullet}^2 (1 \quad 1) m \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1 \Rightarrow \qquad \overline{C_1^\bullet} = \sqrt{\frac{1}{8m}};$$

$$(v_2)\mathbf{A}\{v_2\} = 1;$$

$$\overline{C_2^\bullet}^2 (1 \quad -1) m \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 1 \Rightarrow \qquad \overline{C_2^\bullet} = \sqrt{\frac{1}{4m}}.$$

Generalisane koordinate izra`ene preko normalnih koordinata sada su:

$$x = \overline{C_1^\bullet}\eta_1 + \overline{C_2^\bullet}\eta_2,$$
$$y = \overline{C_1^\bullet}\eta_1 - \overline{C_2^\bullet}\eta_2.$$

Sada se mogu napisati izrazi za potencijalnu i kineti~ku energiju sisitema, izra`eni preko normalnih koordinata:

$$2E_k = \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = m\left[3\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + 3\dot{y}^2\right] = m\left(8\overline{C_1^*}^2\dot{\eta}_1^2 + 8\overline{C_2^*}^2\dot{\eta}_2^2\right) \Rightarrow$$

$$2E_k = \dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2.$$

$$2E_p = c\left(x^2 + y^2\right) = c\left[(\overline{C_1^*}\dot{\eta}_1 + \overline{C_2^*}\dot{\eta}_2)^2 + (\overline{C_1^*}\dot{\eta}_1 - \overline{C_2^*}\dot{\eta}_2)^2\right] = c\left(\frac{1}{4m}\eta_1^2 + \frac{1}{2m}\eta_2^2\right), \text{ dakle:}$$

$$2E_p = \omega_1^2\eta_1^2 + \omega_2^2\eta_2^2 .$$

Sada mo`emo napisati izraze za *sile u u`adima* izra`ene preko *normalnih koordinata*:

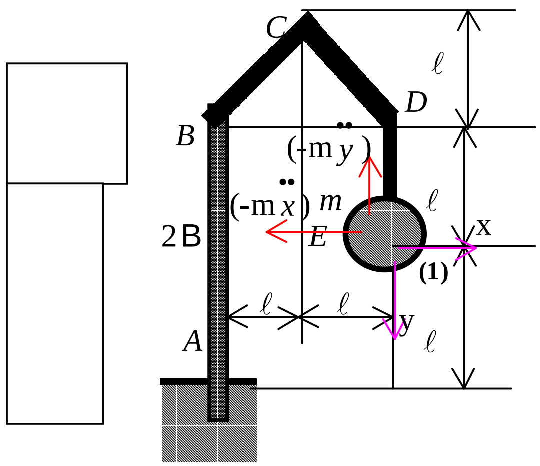
$$S_1 = -cy - 2m\ddot{y} = -c(\overline{C_1^*}\eta_1 - \overline{C_2^*}\eta_2) - 2m\left[\overline{C_1^*}\left(-\omega_1^2\eta_1\right) - \overline{C_2^*}\left(-\omega_2^2\eta_2\right)\right] \Rightarrow$$

$$S_1 = -\frac{c}{4}\sqrt{\frac{1}{2m}}\eta_1 ,$$

$$S_1 = -cy - m\ddot{y} = -c(\overline{C_1^*}\eta_1 - \overline{C_2^*}\eta_2) - m\left[\overline{C_1^*}\left(-\omega_1^2\eta_1\right) - \overline{C_2^*}\left(-\omega_2^2\eta_2\right)\right] \Rightarrow$$

$$S_2 = -\frac{3c}{8}\sqrt{\frac{1}{2m}}\eta_1 + \frac{c}{4}\sqrt{\frac{1}{m}}\eta_2 .$$

TRE] I ZADATAK:

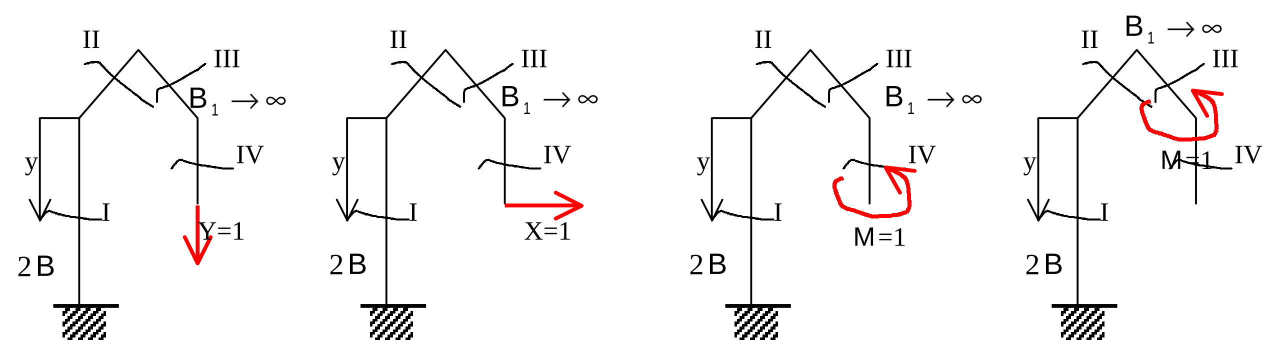


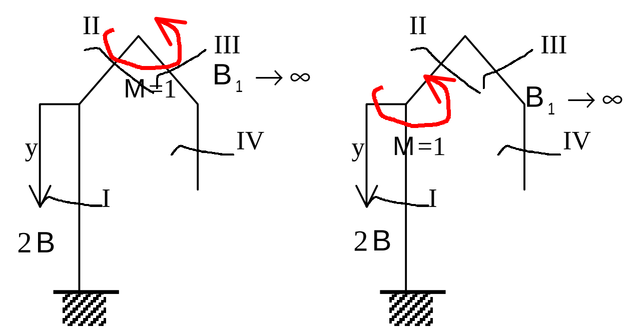
Diferencijalne jedna~ine prinudnog oscilovawa materijalne ta~ke na lakom nosa~u su:

$$x=\alpha_{11}^{HH}\left(-m\ddot{x}\right)+\alpha_{11}^{HV}\left(-m\ddot{y}\right)+\delta_{11}^{H}M_{0}\cos\Omega t$$

$$y=\alpha_{11}^{VH}\left(-m\ddot{x}\right)+\alpha_{11}^{VV}\left(-m\ddot{y}\right)+\delta_{11}^{V}M_{0}\cos\Omega t;$$

Zato }emo prvo odrediti potrebne *uticajne koeficijente pomerawa usled sila i sprega* (kao potsetnik se mo`e koristiti uxbenik: Otpornost materijala, D. Ra{kovi}, poglavqe o uticajnim koeficijentima, ili neki drugi prigodan uxbenik):





Deo nosa~a BCDE je krut pa je $1/B_i=0$, dok su u preseku p_1-p_1, krutosti 2B, raspona 2ℓ. Vrednosti momenata savijawa nosa~a od pojedinih fiktivnih optere}ewa:

$$M_f^{Y=1}(y)=-2l,$$

$$M_f^{X=1}(y)=l-y,\quad 0\le y\le 2l.$$

$M_f^{M=1}(y)=+1$, za sva ~etiri slu~aja dejstva fiktivnog momenta u ta~kama E, D, C, B.

Uticajni koeficijenti pomerawa i obrtawa usled dejstva jedini~nih sila i spregova su:

Uticajni koeficijent α_{11}^{HH} pomerawa preseka (1) u horizonatalnom pravcu usled dejstva jedini~ne horizontalne sile u preseku (1) je:

$$\alpha_{11}^{HH}=\sum_{k}\frac{1}{B_k}\int_{k}\left[M_f^{X=1}(z)\right]^2dz=\frac{1}{2B}\int_{0}^{2l}(l-y)^2dy=\frac{l^3}{3B}=p;$$

Uticajni koeficijent α_{11}^{VV} pomerawa preseka (1) u vertikalnom pravcu usled dejstva jedini~ne vertikalne sile u preseku (1) je:

$$\alpha_{11}^{VV}=\sum_k \frac{1}{B_k}\int_k \left[M_f^{Y=1}(z)\right]^2 dz=\frac{1}{2B}\int_0^{2l}(-2l)^2 dy=\frac{4l^3}{B}=12p;$$

Uticajni koeficijent α_{11}^{HV} pomerawa preseka (1) u horizonatalnom pravcu usled dejstva jedini~ne vertikalne sile u preseku (1) je:

$$\alpha_{11}^{HV}=\sum_k \frac{1}{B_k}\int_k \left[M_f^{X=1}(z)\right]\left[M_f^{Y=1}(z)\right]dz=\frac{1}{2B}\int_0^{2l}(-2l)(l-y)dy=0:$$

Uticajni koeficijent v_{11}^{V} obrtawa preseka (1) u ravni nosa~a usled dejstva jedini~ne vertikalne sile u preseku (1) je:

$$v_{11}^{V}=\sum_k \frac{1}{B_k}\int_k \left[M_f^{M=1}(z)\right]\left[M_f^{Y=1}(z)\right]dz=\frac{1}{2B}\int_0^{2l}(-2l)(+1)dy=-\frac{2l^2}{B}=-6\frac{p}{l};$$

Uticajni pomerawa δ_{11}^{V} obrtawa preseka (1) u vertikalnom pravcu usled dejstva jedini~nog sprega u preseku (1) ravni nosa~a jednak je uticajnom koeficijent v_{11}^{V} obrtawa preseka (1) u ravni nosa~a usled dejstva jedini~ne vertikalne sile u preseku (1), pa je:

$$\delta_{11}^{V}=v_{11}^{V};$$

Uticajni koeficijent v_{11}^{H} obrtawa preseka (1) u ravni nosa~a usled dejstva jedini~ne horizontalne sile u preseku (1) je:

$$v_{11}^{H}=\sum_k \frac{1}{B_k}\int_k \left[M_f^{M=1}(z)\right]\left[M_f^{X=1}(z)\right]dz=\frac{1}{2B}\int_0^{2l}(l-y)(+1)dy=0;$$

Za ostale uticajne koeficijente sledi da je:

$$\delta_{11}^{H}=v_{11}^{H}=0,\qquad \delta_{1B}^{H}=v_{B1}^{H}=v_{11}^{H}=0,\qquad \delta_{1C}^{H}=v_{C1}^{H}=v_{11}^{H}=0,\qquad \delta_{1D}^{H}=v_{D1}^{H}=v_{11}^{H}=0,$$

$$\delta_{1B}^{V}=v_{11}^{V}=-6\frac{p}{l},\qquad \delta_{1C}^{V}=\delta_{1D}^{V}=v_{11}^{V}=-6\frac{p}{l}.$$

Sada diferencijalne jedna~ine prinudnog oscilovawa materijalne ta~ke dobijaju oblik:

$$\ddot{x}+\frac{1}{\alpha_{11}^{HH}m}x=0$$

$$\ddot{y}+\frac{1}{\alpha_{11}^{VV}m}y=\frac{\delta_{11}^{V}}{\alpha_{11}^{VV}}\frac{M_0}{m}\cos\Omega t;$$

$$\ddot{x}+\omega_x^2x=0$$

$$\ddot{y}+\omega_y^2y=h\cos\Omega t,$$

po{to su $\omega_x^2 = \frac{1}{\alpha_{11}^{HH} m} = \frac{1}{pm}$, $\omega_y^2 = \frac{1}{\alpha_{11}^{VV} m} = \frac{1}{12pm}$, $h = \frac{\delta_{11}^{V}}{\alpha_{11}^{VV}} \frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{m}} = \frac{6p\mathrm{M}_0}{12\mathrm{pml}} = \frac{\mathrm{M}_0}{2ml}$, na kraju dobijamo da su *sopstvene kru`ne frekvencije malih oscilacija materijalne ta~ke na lakom nosa~u i u ravni nosa~a*:

$$\omega_x^2 = \frac{3\mathrm{B}}{ml^3},$$

$$\omega_y^2 = \frac{36\mathrm{B}}{ml^3}.$$

Rezonantne vrednosti frekvencije spoqa{weg sprega su:

$$\Omega_{1rez}^2 = \frac{3\mathrm{B}}{ml^3}, \quad \Omega_{2rez}^2 = \frac{36\mathrm{B}}{ml^3} \Rightarrow \Omega_{1rez}^2 = \frac{\Omega_{2rez}^2}{12}.$$

Partikularna re{ewa dobijenih diferencjalnih jedna~ina su:

$$x_p = 0, \qquad y_p = \frac{h}{\omega_y^2 - \Omega^2} \cos \Omega t.$$

i predstavqaju zakone prinudnog oscilovawa materijalne ta~ke u ravni nosa~a pod dejstvom prinudnog sprega.

Sistem se pona{a kao dinami~ki apsorber u odnosu na horizontali-h pravac prinudnih oscilacija, nema prinudnih pomerawa u h pravcu.

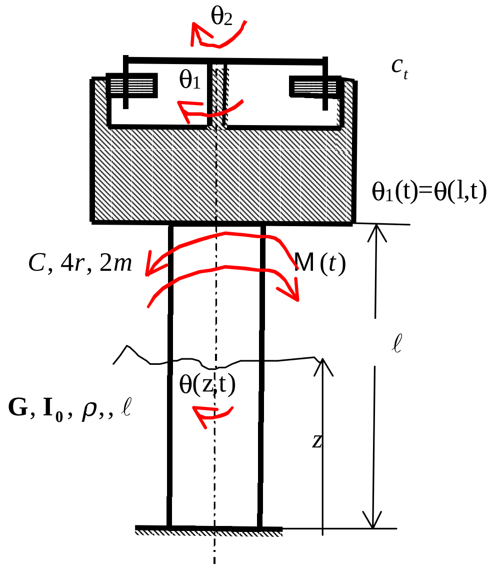
Preme{tawem sprega iz E u D, C i B ne mewa re`im dinamike materijalne ta~ke.

^ETVRTI ZADATAK:

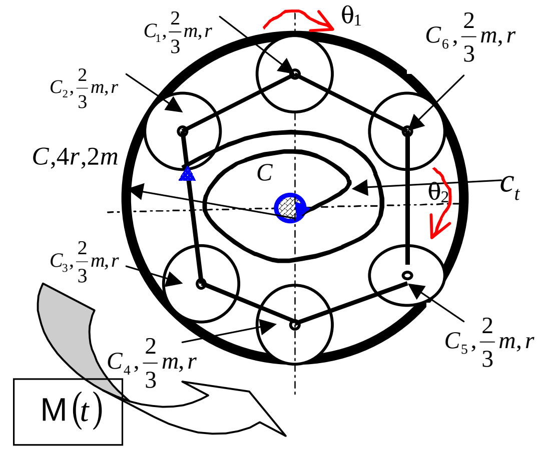
Posmatrani mehani~ki sistem ima **dva podsistema**: **elasti~nu homogenu konzolu-konzolno vratilo**, koje ima beskona~no mnogo stepeni slobode kretawa, a ~ije se torzijske oscilacije opisuju **parcijalnom diferencijalnom jedna~inom po uglu zaokretawa** $\theta(z,t)$, i **podsistema - diskretnog mehani~kog sistema** koji je sastavqen od kritih tela i koji ima **dva stepena slobode kretawa** koji se defini{u **uglovima okretawa zup~anika-sunce** $\theta_1(t)$ **i {estougaone jednakostrani~ne plo~e nosa~a satelita** $\theta_2(t)$.

Da bi smo opisali kretawe ta dva podsistema izaberemo slede}e koordinate: ugao uvijawa elasti~nog vratila $\theta(z,t)$ i uglove okretawa zup~anika-sunce $\theta_1(t)$ i {estougaone jednakostrani~ne plo~e nosa~a satelita $\theta_2(t)$, koje merimo od nazna~ene na slikama br 4 a* i b* konfiguracije sistema. **Razdvajawem sistema na dva podsistema kako je to na slici br. 4 nazna~eno moramo dodati uslove saglasnosti kretawa podsistema krutih tela sa deformacijama elasti~nog podsistema. Wihovo me|udejstvo je izra`eno spregovima istih momenata** $\mathrm{M}(t)$ **ali suprotnih smerova**, kao {to je nazna~eno na slici. **Uslov kontinuiteta sistema (kompatibilnosti podsistema) je izra`en jednako{}u u svakom trenutku vremena, ugla uvijawa vratila** $\theta(\ell,t)$ **na mestu spajawa sa krutim zup~anikom sunce i uglom obrtawa zup~anika sunce** $\theta_1(t)$**, odnosno:** $\theta(\ell,t) = \theta_1(t)$. Koriste}i izabrane koordinate opisa}emo dinamiku svakog od podsistema , a zatim uzeti u obzir nazna~eni uslov kompatibilnosti podsistema.

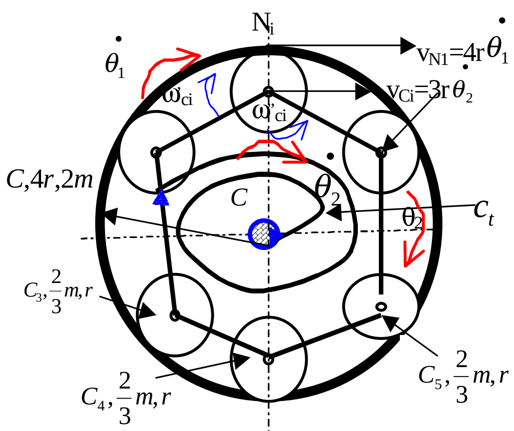
Prvo opi{imo dinamiku sistema zup~anik sunce i sistem zup~anika satelita.



Slika br. 4 a*



Slika br. 4 b*



Slika br. 4 c*

Aksijalni momenti inercija mase zup~anika-diskova sa centrima C_i za ose kroz odgovaraju}i centar su:

$$J_{Ci} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}mr^2 = \frac{1}{3}mr^2, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6;$$

dok je aksijalni moment inercije mase zup~anika sunce - diska sa centrom u S za wegovu centralnu osu:

$$J_0 = J_C = \frac{2m(4r)^2}{2} = 16mr^2.$$

Brzina odgovaraju}e ta~ke N_i, $i = 1,2,3,4,5,6$ na dodiru zup~anika “sunce“ centrom u S i odgovaraju}eg i-tog “satelita“ jednaka je brzini ta~ke N_i zup~anika “sunce“ centrom u S koji rotira ugaonom brzinom $\dot{\theta}_1$, a na rastojawu **4*r*:**

$$v_{Ni} = 4r\dot{\theta}_1$$

dok je brzina v_{C_i}, $i = 1,2,3,4,5,6$, centra masa C_i odgovaraju}eg i-tog “satelita“ jednaka je brzini odgovaraju}e ta~ke C_i nosa~a satelita koji se obr}e ugaonom brzinom $\dot{\theta}_2$ oko ose kroz centar S, a na rastojawu je **3*r*:**

$$v_{Ci} = 3r\dot{\theta}_2.$$

Ugaona brzina i-tog “satelita“ ω_{C_i}, $i = 1,2,3,4,5,6$ jednaka je zbiru, sa odgovaraju}im znakom, komponentnih ugaonih brzina: $\omega_{C_i}{}'$ $\omega_{C_i}{}''$, $i = 1,2,3,4,5,6$, koje odre|ujemo kao ugaone brzine obrtawa koja se javqaju: $\omega_{C_i}{}'$, $i = 1,2,3,4,5,6$, kada pretpostavimo da stoji {estougaona plo~a -nosa~ satelita, a satelit se obr}e zbog spregnutosti sa zup~anikom sunce, odnosno , ω_{C_i}'' , $i=1,2,3,4,5,6$, kada pretpostavimo da stoji zup~anik sunce a da se obr}e {estougaona plo~a nosa~ satelita, i na osnovu toga pi{emo:

$$\omega_{Ci}^{`} = \frac{v_{Ni}}{r} = 4\dot{\theta}_1 \quad (\quad), \qquad \omega_{Ci}^{``} = \frac{v_{Ci}}{r} = 3\dot{\theta}_2 \quad (\quad),$$

U zagradam strelice ozna~avaju smer obrtawa, pa je zato:

$$\omega_{Ci} = \omega_{iC}^{`} - \omega_{iC}^{``}$$

pa sledi da je :

$$\omega_{Ci} = 4\dot{\theta}_1 - 3\dot{\theta}. \quad (\quad).$$

Proveru odre|ene vrednosti ugaone brzine ω_{C_i} vr{imo odre|ivawem brzina odgovaraju}e ta~ke N_i, $i=1,2,3,4,5,6$ na dodiru zup~anika “sunce“ centrom u S i odgovaraju}eg i-tog “satelita“ , koja se mo`e odrediti i kao apsolutna, rezultuju}a brzina ta~ke na obimu satelita koji vr{i prenosno kretawe rotacijom, ugaonom brzinom $\dot{\theta}_2$ i relativno kretawe rotacijom, ugaonom brzinom ω_{C_i} i na osnovu toga pi{emo:

$$v_{\overline{N}i} = 4r\dot{\theta}_1 = v_{Ci} + v_{Ni}^{(Ci)} = 3r\dot{\theta}_2 + r\omega_{Ci} = 4r\dot{\theta}_1.$$

~ime smo potvrdili ta~nost izra~unate vrednosti za ω_{C_i} .

Kineti~ka energija dela sistema krutih obrtnih zup~anika u sprezi: zup~anika “sunce“ centrom u S ~ija kineti~ka energija rotacije je polovina proizvoda wegovog aksijalnog momenta inercije mase J_C i ugaone brzine $\omega_C = \dot{\theta}_1$ i kineti~kih energija sistema zup~anika i-tih “satelita“ koje su jedanke zbirovima kineti~kih energija rotacije ugaonim brzinama ω_{C_i} oko osa kroz wihove centre masa i translacije brzinama translacije wihovih centara masa v_{C_i} i na osnovu toga pi{emo:

$$2E_k = J_C\omega_C^2 + \sum_{i=1}^{6} J_{Ci}\omega_{Ci}^2 + \sum_{i=1}^{6} m_i v_{Ci}^2 \Rightarrow$$

$$2E_k = 6mr^2\left(8\dot{\theta}_1^2 - 8\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 9\dot{\theta}_2^2\right),$$

Inercijska matrica je oblika:

$$\mathbf{A} = 6mr^2\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} = 6mr^2\overline{\mathbf{A}}.$$

Potencijalna energija dela sistema krutih tela u sprezi sa spiralnom oprugom je:

$$2E_p = c_t(\theta_2 - \theta_1)^2,$$

Kvazielasti~na matrica je oblika:

$$\mathbf{C} = c_t\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = c_t\overline{\mathbf{C}}.$$

Uvedimo oznaku: $\omega_0^2 = \dfrac{c_t}{6mr^2}$.

Lagrange-eove jedna~ine druge vrste za generalisane koordinate θ_1 i θ_2, u matri~nom obliku su:

$$\mathbf{A}\left\{\ddot{\theta}\right\} + \mathbf{C}\{\theta\} = \{\theta_\theta\}/6mr^2;$$

odnosno

$$\overline{\mathbf{A}}\left\{\ddot{\theta}\right\} + \omega_0^2\overline{\mathbf{C}}\{\theta\} = \frac{1}{6mr^2}\begin{Bmatrix} \mathrm{M}_t(t) \\ 0 \end{Bmatrix},$$

ili u skalarnom obliku:

$$8\ddot{\theta}_1 - 4\ddot{\theta}_2\,\omega_0^2(\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{6mr^2}\mathrm{M}_t(t)$$

$$\underline{-4\ddot{\theta}_1 + 9\ddot{\theta}_2\,\omega_0^2(-\theta_1 + \theta_2) = 0} \qquad (*)$$

Da bi smo dobili jednu diferencijalnu jedna~inu po generalisanoj koordinati θ_1 eliminisawem druge koordinate θ_2 i wenih izvoda, a radi isko{i{}ewa uslova kompatibilnosti dva podsistema, $\theta(\ell,t) = \theta_1(t)$, saberimo dve jedna~ine prethodnog sistema. Posle sabirawa ovih jedna~ina sledi:

$$4\ddot{\theta}_1 + 5\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{6mr^2}\mathrm{M}_t(t),$$

odakle posle re{avawa po $\ddot{\theta}_2$ i dvostrukog diferencirawa dobijamo za $\ddot{\theta}_2$ i $\ddddot{\theta}_2$, slede}e:

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{4}{5}\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{30mr^2}\mathrm{M}_t(t)$$

$$\ddddot{\theta}_2 = -\frac{4}{5}\ddddot{\theta}_1 + \frac{1}{30mr^2}\ddot{\mathrm{M}}_t(t).$$

Sada posle dvostrukog diferencirawa druge jedna~ine sistema (*) i uno{ewa dobijenih vrednosti za $\ddddot{\theta}_2$ i $\ddot{\theta}_2$ u tu jedna~inu, dobijamo slede}u nehomogenu diferencijalnu jedna~inu ~etvrtog reda po generalisanoj koordinati θ_1:

$$56\ddddot{\theta}_1 + 9\omega_0^2\ddot{\theta}_1 = \frac{3}{2mr^2}\ddot{\mathrm{M}}_t(t) + \frac{\omega_0^2}{6mr^2}\mathrm{M}_t(t). \qquad (**)$$

Sada opi{imo **torzijske oscilacije konzolnog vratila** sa slike 4 a*. Parcijalna diferencijalna jedna~ina torzijskih oscilacija homogenog vratila je:

$$\frac{\partial^2\theta(z,t)}{\partial t^2} = c_t^2\frac{\partial^2\theta(z,t)}{\partial z^2}, \quad c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \qquad (1)$$

gde je $\theta(z,t)$ ugao obrtawa popre~nih preseka vratila, kako je to nazna~eno na slici 4 a*.

Re{ewe ove jedna~ine pretpostavqamo u obliku:

$\theta(z,t) = T(t)Z(z).$

saglasno **Bernoulli-jevoj metodi partikularnih integrala**. Parcijalna diferencijalna jedna~ina (1) pomo}u pretpostavqenog re{ewa se svodi na dve obi~ne diferencijalne jedna~ine razdvojenih promenqivih:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0,$$

$$Z^{''}(z) + \lambda^2 Z(t) = 0,$$

gde su : $\omega = c_t \lambda$, $\omega^2 = \lambda^2 \dfrac{G}{\rho}$, $c_{te} = \dfrac{GI_0}{l}$, $\xi = \lambda l$, $\overline{\omega}_0^{\,2} = \dfrac{G}{\rho l^2}$.

Op{ta re{ewa tih obi~nih diferencijalnih jedna~ina su:

$$Z(z) = C_1 \cos \lambda z + C_2 \sin \lambda z \,,$$

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \,,$$

Obratimo pa`wu da va`e slede}e relacije:

$$\ddot{T}(t) + \lambda^2 c_t^2 T(t) = 0 \Rightarrow \ddot{T}(t) = -\lambda^2 c_t^2 T(t) = -\omega^2 T(t) = -\xi^2 \overline{\omega}_0^{\,2} T(t)\,.$$

Grani~ni uslovi konzolnog vratila koji nosi diskretni sistem zup~anika u sprezi su:

a* u ukle{tewu ugao obrtawa vratila je jednak nuli:

$$\theta(0,t) = 0 \Rightarrow \theta(0,t) = Z(0)T(0) = 0 \Rightarrow Z(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0,\ Z(z) = C_2 \sin \lambda z$$

b* na “slobodnom” kraju konzolnog vratila ugao uvijawa je jednak:

$$\theta(l,t) = C_2 \sin \xi T(t) = \theta_1(t)\,,$$

dok su wegovi izvodi jednaki:

$$\ddot{\theta}_1(t) = -C_2 \xi^2 \overline{\omega}_0^{\,2} \sin \xi\, T(t) \Rightarrow \qquad \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\theta}_1(t) = C_2 \xi^4 \overline{\omega}_0^{\,4} \sin \xi\, T(t) \qquad (2)$$

Moment uvijawa na “slobodnom” kraju konzolnog vratila je:

$$\mathrm{M}_{tl}(z,t)\Big|_{z=l} = \mathrm{M}_1(t) = -GI_0 \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z}\Big|_{z=l} \Rightarrow$$

$$\mathrm{M}_{tl}(z,t)\Big|_{z=l} = -C_2 c_{te} \xi \cos \xi T(t) = \mathrm{M}_t(t) \Rightarrow \qquad (3)$$

dok su wegovi izvodi:

$$\ddot{\mathrm{M}}_{tl}(z,t)\Big|_{z=l} = -C_2 c_{te} \xi \cos \xi\, \ddot{T}(t) = \ddot{\mathrm{M}}_t(t) \Rightarrow$$

$$\ddot{\mathrm{M}}_t(t) = C_2 c_{te} \xi^3 \overline{\omega}_0^{\,2} \cos \xi\, T(t)\,; \qquad (4)$$

Sada uvodimo i oznake:

$$\omega_{0e}^2 = \frac{c_{te}}{6mr^2}, \quad \mu = \frac{\overline{\omega}_0^{\,2}}{\omega_{0e}^2}, \quad k^2 = \frac{\omega_0^2}{\overline{\omega}_0^{\,2}}.$$

Uvode}i u jedna~inu (**)

$$56\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\theta}_1 + 9\omega_0^2 \ddot{\theta}_1 = \frac{3}{2mr^2} \ddot{\mathrm{M}}_t(t) + \frac{\omega_0^2}{6mr^2} \mathrm{M}_t(t) \qquad (**)$$

odgovaraju}e dobijene izraze (2) za izvode generalisane koordinate $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\theta}_1$ i $\ddot{\theta}_1$, odnosno izraze (3) i (4) za odgovaraju}e izvode spregova, $\mathrm{M}_t(t)$ i $\ddot{\mathrm{M}}_t(t)$ dobjamo slede}u karakteristi~nu - frekventnu jedna~inu:

$$56 C_2 \xi^4 \overline{\omega}_0^{\,4} \sin \xi T(t) - 9 C_2 \xi^2 \overline{\omega}_0^{\,2} \omega_0^2 \sin \xi T(t) = \frac{3}{2mr^2} C_2 \xi^3 c_{te} \overline{\omega}_0^{\,2} \cos \xi T(t) - \frac{\omega_0^2}{6mr^2} C_2 \xi c_{te} \cos \xi T(t) \text{ o}$$

dnosno sledi $\quad \Rightarrow$

$$C_2 T(t)\xi\overline{\omega}_0^2\left\{\xi\sin\xi\left(56\xi^2-9k^2\right)\overline{\omega}_0^2-\omega_{0e}^2\cos\xi\left(9\xi^2-k^2\right)\right\}=0\Rightarrow$$

I na kraju dobijamo u sre|enom obliku slede}u frekventnu jedna~inu:

$$\mu\xi tg\xi=\frac{9\xi^2-k^2}{56\xi^2-9k^2}.$$

koja je transcedentna i ima beskona~no mnogo korenova, a sa tim i sistem beskona~no mnogo sopstvenih brojeva i toliko isto spostvenih kru`nih frekvencija.

Prethodna frekventna jedna~ina se mo`e re{avati pribli`nim, numeri~kim metodama. Uz odgovaraju}e pretpostavke mo`emo odrediti i pribli`ne vrednosti najni`ih sopstvenih brojeva. Zato uvedemo predpostavku da je $tg\xi\approx\xi$, za male vrednosti $\xi$, pri ~emu smo prakti~no usvojili prvi ~lan razvoja funkcije $tg\xi$ u Taylor-ov red u okolini $\xi\approx 0$ to iz prethodne frekventne jedna~ine dobijamo slede}u pribli`nu:

$$\mu\xi^2\left(56\xi^2-9k^2\right)-9\xi^2+k^2\approx 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 56\xi^4-9\xi^2\left(k^2+\frac{1}{\mu}\right)+\frac{k^2}{\mu}=0$$

Vidimo da je ta jedna~ina bikvadratna i da se lako re{ava, i weni koreni se dobijaju u obliku:

$$\xi_{1,2}^2=\frac{9\left(k^2+\frac{1}{\mu}\right)\mp\sqrt{81\left(k^2+\frac{1}{\mu}\right)^2-4*56\frac{k^2}{\mu}}}{112}.$$

Specijalno, za zadate vrednosti parametra torzijske krutosti konzolnog vratila i krutosti spiralne opruge: $c_{te}=\frac{GI_0}{l}=c_t\Rightarrow\quad\mu=\frac{1}{k^2}$ ta pripli`na frekventna jedna~ina se svodi na:

$$56\xi^4-2\cdot 9\cdot k^2\xi^2+k^4=0\Rightarrow$$

dok su weni koreni jednaki:

$$\xi_{1,2}^2=\frac{9k^2\mp 5k^2}{56}\Rightarrow$$

pa su pribi`ne vrednosti najni`ih sopstvenih brojeva oscilovawa izu~avanog mehani~kog oscilatornog sistema, koji predstavqa spregu elasti~nog podsistema i diskretnog podsistema, jednake:

$$\xi_1^2=\frac{1}{14}k^2\qquad\text{i}\qquad\xi_2^2=\frac{1}{4}k^2.$$

Pribli`ne vrednosti kvadrata najni`ih sopstvenih kru`nih frekvencija sistema za male oscilacije i zadate parametre su sada:

$$\omega_1^2=\frac{\xi_1^2}{\ell^2}\frac{G}{\rho}=\frac{k^2}{14\ell^2}\frac{G}{\rho}=\frac{c_t}{84mr^2}=\frac{GI_0}{84mr^2\ell}\qquad\text{i}\qquad\omega_1^2=\frac{\xi_1^2}{\ell^2}\frac{G}{\rho}=\frac{k^2}{4\ell^2}\frac{G}{\rho}=\frac{c_t}{24mr^2}=\frac{GI_0}{24mr^2\ell}.$$